下線付き部分集合の記号はこの頃では用いられないのか

鈴木 登志雄
首都大学東京 理学研究科 数理科学

2019 年 9 月 25 日

概要

単に A が B の部分集合であるという場合，A と B が等しい可能性を排除しない．この部分集合という関係を表す記号には二つの流儀がある．下線がないものと付いているものである．ある有名な文献にある「下線付きのものはこの頃は用いられない」という主旨の記述に関連して，少しばかり調査したことを記す．

1　下線付き部分集合の記号はこの頃では用いられないという説

数学の教科書に「この頃では」という言葉はそう頻繁には登場しない．「7 はこの頃では 6 より大きい」などと書いてあるわけがない．だからであろう，数学の教科書に「この頃では」という文言をみつけると強い印象を受ける．松坂『集合・位相入門』(1968) はロングセラーで新装版も出ている．数学科出身者なら読んだことがある人は多いだろう．以下の一節は同書 [38, 第 1 章 § 1 D] からの引用である．以下，これを**引用 1** とよぶ．

> **引用 1**　A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$ と書き，A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ で表わす流儀もあるが，この記法はこのごろではあまり用いられない．

ここで少しおさらいしておく．高等学校「数学 I」における一般的な説明は次のとおりである．集合 A が集合 B の部分集合であるとは，A のどの要素も B の要素であることをいう．ただし A が空集合の場合は，どんな集合 B に対しても A は B の部分集合であるとする．A が B の部分集合であり，しかも A と B が等しくないとき，A は B の真部分集合であるという．A が B の部分集合でないとは，A の要素だが B の要素ではないものが存在することである．ここで大事なことは，A と B が等しい場合も，やはり A を B の部分集合と言う点である．だからこそ，真部分集合という言い方が別に用意されている．

部分集合の記法には，主要な流儀が二つある．流儀の名前は決まっていないので，ここでは下線なし方式と下線付き方式と仮に呼ぶことにする．下線なし方式は，A が B の部分集合であることを $A \subset B$ で表すやり方である．A が B の真部分集合であることは $A \subsetneq B$ で表す．A が B の部分集合でないことを表したいとき $A \not\subset B$ と書くこともある．また，A が B の部分集合であることを $B \supset A$ と表すこともある．同様に A が B の真部分集合であることを $B \supsetneq A$ と表すこともある．

下線付き方式は，A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$ で表す．A が B の真部分集合であることは $A \subset B$ で表す．A が B の部分集合でないことを $A \not\subseteq B$ と書くこともある．また，A が B の部分集合であることを $B \supseteq A$ と表したり，A が B の真部分集合であることを $B \supset A$ と表したりすることもある．

どちらの流儀にもいくつか変種がある．たとえば，真部分集合の記号を使わないやり方もある．また，下線

を二重下線にするやり方もあり，その場合 $\subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq, \not\subset$ の代わりにそれぞれ $\subseteqq, \supseteqq, \subsetneqq, \supsetneqq, \nsubseteq$ を用いる．たとえば岩波数学辞典第 4 版 [35] では「部分集合」,「真部分集合」,「部分集合でない」をそれぞれ $\subset, \subsetneqq, \not\subset$ で表す．部分集合でない記号の左右反転表記はあまり見かけないが，たとえば $A \not\subset B$ の代わりに $B \not\supset A$ と書くこともありえる．

	A は B の部分集合	A は B の真部分集合	A は B の部分集合でない
下線なし方式	$A \subset B$	$A \subsetneq B$	$A \not\subset B$
下線付き方式	$A \subseteq B$	$A \subset B$	$A \nsubseteq B$

表 1.1　部分集合の記号についての二つの流儀

上記の分類に当てはまらない文献もまれにある．たとえば [37] では部分集合を $\subseteq$，真部分集合を $\subsetneq$ で表している．日本工業規格 (JIS) の規格 JIS Z 8201 では，部分集合の記号を規定していない．

引用 1 に戻ろう．松坂 [38] は下線なし方式を採用している．引用 1 を支持する証拠をみつけらるだろうか．つまり [38] より以前に出版された有名な文献で下線付き方式を採用しているものと，それより後，かつ [38] より少し前に出版された有名な文献で下線なし方式を採用しているものをみつけられるだろうか．あっさりみつかった．詳しい書誌情報は本稿末の参考文献欄をご覧いただくとして，以下の通りである．

1957 年 赤 [31] 『集合論入門』：下線付き方式
1960 年 Halmos [42] “Naive set theory”：下線なし方式
1963 年 伊藤 [23] 『ルベーグ積分入門』：下線なし方式
1967 年 Shoenfield [53] “Mathematical logic”：下線なし方式
1967 年 Rogers [52] “Theory of recursive functions and effective computability”：下線なし方式

[42] は集合論の入門書．[53] は数理論理学（数学基礎論）全体をカバーした入門書で公理的集合論も含む．[52] は数理論理学のうち，計算可能性理論*1 に特化した入門書である．いずれも長く読まれた本で，今でも読まれているものもある．[31] は文庫で復刻版が出た．[23] は新装版が出ている．これらの傍証を見る限り，[38] 初版が出版された時点の状況について，引用 1 は正しい認識を示しているといえよう．では，[38] 初版から 50 年あまり経過した現時点ではどうなのだろか．つまり引用 1 の「このごろ」を 2019 年前後に読み替えた主張の妥当性を知りたい．

2　初版から 50 年後の高校と大学の教科書

2019 年初夏，東京都某区の教科書センターに赴き，陳列されている「数学 I」教科書を一通り点検した．内訳は東京書籍 5 冊，実教出版 4 冊，啓林館 3 冊，数研出版 5 冊，第一学習社 3 冊である．

A が B の部分集合であることを $A \subset B$ で表し，$B \supset A$ と書くことも許し，真部分集合の記号には言及せず，部分集合でないことの記号にも言及しないものが 16 冊あった．内訳は以下の通り．東京書籍の 4 冊 [1, 2, 3, 4]，実教出版の 3 冊 [6, 7, 8], 啓林館の 3 冊 [10, 11, 12], 数研出版の 4 冊 [13, 14, 15, 16], 第一学習社の 2 冊 [18, 19].

また，A が B の部分集合であることを $A \subset B$ で表し，$B \supset A$ という書き方・真部分集合の記号・部分集

*1 当時は帰納的関数論という言い方のほうが馴染み深かったかもしれない

合でないことの記号の 3 項目には言及しないものが 4 冊あった．内訳は東京書籍の 1 冊 [5], 実教出版の 1 冊 [9], 数研出版の 1 冊 [17], 第一学習社の 1 冊 [20] である．高校数学の教科書を見る限り，引用 1 の「このごろ」を 2019 年前後に読み替えた主張の妥当性はまったく揺るがない．

だが高校数学の教科書だけで判断するのは早計かもしれない．[38] 初版よりも後の時代に出た，大学学部向けの集合と位相の本をいくつか見てみよう．1986 年の内田 [24]，2002 年の齋藤 正彦 [29]，2009 年の斎藤 毅 [28]，2016 年の新井 [21] は，いずれも下線なし方式である．一方，2018 年の藤田 [36] は下線付き方式である．

位相空間に付随した形で集合をとりあげるのではなく，集合と論理をテーマにした学部初年級向けの文献も，2000 年頃からいくつか出版されている．2002 年の中内 [33]，2008 年の渡辺ほか [39] と嘉田 [25]，2012 年の中島 [34]，2016 年の鈴木（拙著）[30]，2019 年の坪井ほか [32] は下線なし方式である．一方，2015 年の石川 [22] は下線付き方式である．

大学学部数学の「集合と位相」や「集合と論理」の日本語教科書を見る限り，引用 1 の「このごろ」を 2019 年前後に読み替えた主張の妥当性は，少し例外はあるが，大きくは揺るがない．

3 英語圏の数理論理学入門書における記法の変遷

前述の通り，[38] 初版の前年に英語圏では [53] が出版され，下線なし方式を採用していたのだった．その 10 年後の話をしよう．Barwise の編集により “Handbook of mathematical logic”[40] が出版された．これは 1100 ページ以上あり，出版時点での数理論理学の主要な成果を網羅したハンドブックである．著者は 34 人いて，その中には前述の Shoenfield，後述の Enderton，Jech，Kunen もいる．このハンドブックでは，部分集合の記号として下線付き方式を採用している．

数理論理学の総合的入門書として [53] 一強に近い状況が続いたが，時が経つにつれ他の選択肢は増えてきた．たとえば 2001 年には Enderton の本の第 2 版 “A mathematical introduction to logic second edition” [41] が出版された．2009 年には『キューネン数学基礎論講義』[27] の原書である Kunen の本 [46], 2010 年には Mendelson の本の第 5 版 [48] と Rautenberg の本の第 3 版 [51] が出版された．これら 4 冊は下線付き方式を採用している．

1977 Barwise 編 “Handbook of mathematical logic”：下線付き方式
2001 Enderton “A mathematical introduction to logic second edition”：下線付き方式
2009 Kunen “The foundations of mathematics ”：下線付き方式
2010 Mendelson “Introduction to mathematical logic fifth edition”：下線付き方式
2010 Rautenberg “A concise introduction to mathematical logic third edition”：下線付き方式

これだけ見ると，例の主張の妥当性は揺らぐ．数理論理学の総合的入門書ではなく，公理的集合論に特化した入門書はどうか．1978 年の Jech[43]，1983 年の Kunen[45] （邦訳は [26]）ならびに，これらの後継である 2 書すなわち，2003 年に出た Jech の本の第 3 版 [44]，2011 年に出た Kunen の新しい本 [47] について確認した結果が以下である．

1978 Jech “Set theory”：下線付き方式
1983 Kunen “Set theory an introduction to independence proofs ”：下線なし方式
2003 Jech “Set theory third millennium edition”：下線なし方式
2011 Kunen “Set theory ”：下線付き方式

Kunen は下線なし方式から下線付き方式に移行している．一方 Jech は逆に下線付き方式から下線なし方式に移行している．

計算可能性理論に特化した入門書はどうだろうか．前述の通り 1967 年の Rogers[52] は下線なし方式であった．1980 年代の Soare [55] と Odifreddi [50], 2009 年の Nies [49] は，いずれも下線付き方式である．

1987 Soare “Recursively enumerable sets and degrees”：下線付き方式
1989 Odifreddi “Classical recursion theory”：下線付き方式
2009 Nies “Computability and randomness”：下線付き方式

英語圏での数理論理学の文献をいくつか見た限りでは，例外はあるものの，2019 年現在では下線付き方式が優位である．

4 まとめ

(1) 部分集合の記号には二つの流儀がある．一方は本稿で下線なし方式とよんでいるもので，部分集合を $\subset$ で，真部分集合を $\subsetneq$ で表す．他方は本稿で下線付き方式とよんでいるもので，部分集合を $\subseteq$ で，真部分集合を $\subset$ で表す．
(2) 日本工業規格 (JIS) の規格 JIS Z 8201 では，部分集合の記号を規定していない．
(3) 松坂『集合・位相入門』(1968) は下線なし方式を採用している．下線付き方式はこのごろはあまり用いられないという主旨の記述がある．
(4) 2019 年時点で日本の高等学校数学教科書は，下線なし方式である．大学の集合と位相の日本語教科書，および集合と論理の日本語教科書は下線なし方式が多い．一部に下線付き方式のものもある．
(5) 松坂の上記の記述は，初版当時の状況について妥当な認識である．当時は英語圏の数理論理学の入門書においても下線なし方式が優位であった．しかし 2019 年現在，英語圏の数理論理学の入門書においては下線付き方式が優位である．

上記の (4) と (5) は，本稿で調べた範囲での見解である．これから日本語で集合の本を書く人にとっては，どちらの流儀を採用するべきか悩ましい．とくに大学の授業の教科書の場合，なるべくなら他の授業と記法を揃えたい．二つの流儀それぞれに対応した版を用意すれば解決するが，紙媒体の通常の図書の場合，二種類の在庫をもつのは出版社にとって負担が大きい．電子書籍やオンデマンド出版の場合は可能性がある．

補足　部分集合に関する LaTeX での記述

本稿に出てきた部分集合の記号を LaTeX では以下のようにタイプする．

$\subset$ \subset　$\subsetneq$ \subsetneq　$\not\subset$ \not\subset　$\supset$ \supset　$\supsetneq$ \supsetneq　$\not\supset$ \not\supset

$\subseteq$ \subseteq　$\not\subseteq$ \not\subseteq　$\supseteq$ \supseteq　$\not\supseteq$ \not\supseteq

$\subseteqq$ \subseteqq　$\subsetneqq$ \subsetneqq　$\not\subseteqq$ \not\subseteqq　$\supseteqq$ \supseteqq

参考文献

高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書（教科書の略号順）

[1] 2 東書数 I301 俣野 博・河野 俊丈 編,「数学 I」平成 23 年検定, 東京書籍 (2012).
[2] 2 東書数 I302 俣野 博・河野 俊丈 編,「新編数学 I」平成 23 年検定, 東京書籍 (2012).
[3] 2 東書数 I317 俣野 博・河野 俊丈 編,「数学 I Advanced」平成 28 年検定, 東京書籍 (2017).
[4] 2 東書数 I318 俣野 博・河野 俊丈 編,「数学 I Standard」平成 28 年検定, 東京書籍 (2017).
[5] 2 東書数 I319 俣野 博・河野 俊丈 編,「改訂 新数学 I」平成 28 年検定, 東京書籍 (2017).
[6] 7 実教数 I320 岡本 和夫ほか,「数学 I 新訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2017).
[7] 7 実教数 I321 岡本 和夫ほか,「新版 数学 I 新訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2017).
[8] 7 実教数 I322 岡本 和夫ほか,「新 数学 I」平成 28 年検定, 実教出版 (2017).
[9] 7 実教数 I323 岡本 和夫・ピーター フランクルほか,「高校数学 I 新訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2017).
[10] 61 啓林館数 I324 高橋 陽一郎 編,「詳説 数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2016).
[11] 61 啓林館数 I325 藤田岳彦 編,「数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2016).
[12] 61 啓林館数 I326 若山正人 編,「新編 数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 実教出版 (2016).
[13] 104 数研数 I327 大島 利雄ほか,「数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[14] 104 数研数 I328 岡部 恒治ほか,「高等学校数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[15] 104 数研数 I329 大矢 雅則ほか,「新編 数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[16] 104 数研数 I330 山本 慎ほか,「最新 数学 I」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[17] 104 数研数 I331 秋山 仁ほか,「新高校の数学 I 改訂版」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[18] 183 第一数 I332 長谷川 考志ほか,「数学 I」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[19] 183 第一数 I333 長谷川 考志ほか,「高等学校数学 I」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).
[20] 183 第一数 I334 長谷川 考志ほか,「新編 数学 I」平成 28 年検定, 数研出版 (2017).

その他（和書は著者名五十音順，洋書は著者名アルファベット順）

[21] 新井敏康「集合・論理と位相」, 東京図書 (2016).
[22] 石川 剛郎「論理・集合・数学語」, 共立出版 (2015).
[23] 伊藤 清三「ルベーグ積分入門（新装版）」, 裳華房 (2017). 初版は (1963).
[24] 内田伏一「集合と位相」, 裳華房 (1986).
[25] 嘉田 勝「論理と集合から始める数学の基礎」，日本評論社 (2008).
[26] キューネン 著，藤田 博司 訳「集合論—独立性証明への案内」，日本評論社 (2008).
[27] キューネン 著，藤田 博司 訳「キューネン数学基礎論講義」，日本評論社 (2016).

[28] 斎藤 毅「集合と位相」, 東京大学出版会 (2009).
[29] 齋藤 正彦「数学の基礎 集合・数・位相」，東京大学出版会 (2002).
[30] 鈴木 登志雄「例題で学ぶ集合と論理」，森北出版 (2016).
[31] 赤 攝也「集合論入門」ちくま学芸文庫 (2014). 初版は培風館 (1957).
[32] 坪井 明人・塩谷 真弘・佐垣 大輔「集合入門」牧野書店 (2019).
[33] 中内 伸光 「数学の基礎体力をつけるためのろんりの練習帳」, 共立出版 (2002).
[34] 中島 匠一「集合・写像・論理—数学の基本を学ぶ」，共立 (2012).
[35] 日本数学会 編「岩波数学辞典 第４版」, 岩波書店 (2007).
[36] 藤田 博司「「集合と位相」をなぜ学ぶのか — 数学の基礎として根づくまでの歴史」, 技術評論社 (2018).
[37] ホップクロフト・ウルマン 著, 野崎 昭弘・高橋 正子・町田 元・山崎 秀記 訳「オートマトン 言語理論 計算論 I」サイエンス社 (1984).
[38] 松坂 和夫「集合・位相入門」, 岩波書店 (2018). 初版は (1968).
[39] 渡辺 治・北野 晃朗・木村 泰紀・谷口 雅治「数学の言葉と論理」, 朝倉書店 (2008).
[40] Barwise eds., “Handbook of mathematical logic”, Elsevier (1977).
[41] Enderton, H.B., “A mathematical introduction to logic second edition”, Harcourt / Academic Press (2001).
[42] Halmos, P.R., “Naive set theory”, D. Van Nostrand (1960).
[43] Jech, T., “Set theory”, Academic Press (1978).
[44] Jech, T., “Set theory third millennium edition”, Springer (2003).
[45] Kunen, K., “Set theory an introduction to independence proofs ”, Elsevier (1980).
[46] Kunen, K., “The foundations of mathematics ”, College Publications (2009).
[47] Kunen, K., “Set theory ”, College Publications (2011).
[48] Mendelson, E., “Introduction to mathematical logic fifth edition”, Taylor & Francis (2010).
[49] Nies, A., “Computability and randomness”, Oxford (2009).
[50] Odifreddi, P.G., “Classical recursion theory”, Elsevier (1989).
[51] Rautenberg, “A concise introduction to mathematical logic third edition”, Springer (2010).
[52] Rogers, H. Jr., “Theory of recursive functions and effective computability”, McGraw-Hill (1967). Reprint: The MIT Press (1987).
[53] Shoenfield, J.R., “Mathematical logic”, Addison-Wesley (1967). Reprint: CRC Press (2010).
[54] Shoenfield, J.R., “Axioms of set theory”, in: Barwise, J. eds., *Handbook of mathematical logic*, Elsevier (1977).
[55] Soare, R.I., “Recursively enumerable sets and degrees”, Springer (1987).