真理値表による命題論理の初歩：『例題で学ぶ集合と論理』（森北出版，2016）非公式別添資料 *

鈴木 登志雄

2018 年 11 月 12 日

概要

『例題で学ぶ集合と論理』（2016）では自然演繹に基づいて命題論理の入門的解説を行った．この別添資料では，異なるアプローチによって入門的解説を行う．自然演繹ではなく，真理値表を用いる．

1　この資料の位置づけ

拙著『例題で学ぶ集合と論理』（森北出版，2016，以下「書籍本体」とよぶ）1.1 節「命題論理の初歩」では，ゲンツェンの自然演繹をお手本にして命題論理の規則を導入した（サブセクション 1.1.4 から 1.1.6）．この規則の下で結合法則など，いくつかの法則が成り立つことを紹介し（同 1.1.7），命題論理の「ならば」の感覚的な理解を促す説明を行った（同 1.1.8）．さらに，この枠組みの中で力ずくの場合分けによる証明ができることを示し，場合分けによる証明の具体例を観察した（同 1.1.9）．証明の省略は多少あるものの，命題論理の話の流れをごまかしなしに理解することを目指した．

この資料では，力ずくの場合分けによる証明をしてよいことを初めから承認する．そして，真理値表を導入して命題論理の初歩を解説する．問題の解き方だけを短時間で身につけたい人に向いているやり方である．書籍本体サブセクション 1.1.1 から 1.1.3 まで読んだ後，サブセクション 1.1.4 から 1.1.9 を飛ばして，代わりにこの資料をよんですぐに書籍本体 1.2 節に進むことができる．このやり方で学んだ人も，いずれ余裕ができたら書籍本体サブセクション 1.1.4 から 1.1.9 を見てもらいたい．より見晴らしのいい理解ができるはずである．

		（自然演繹による命題論理の初歩）		
§§1.1.1–1.1.3	→	§§1.1.4–1.1.9	→	§1.2（集合）とそれ以降
	↘		↗	
		本資料		
		（真理値表による命題論理の初歩）		

表 1.1　迂回路としての，この資料の位置づけ

§ は書籍本体の節（セクション），§§ はサブセクションを表す．

* この資料は出版社を通さずに著者が公表しているので「非公式」と名乗っている．

2　真理値表

「または」(記号は $\vee$),「かつ」(記号は $\wedge$),「・・・でない」(記号は $\neg$) という言葉は，高等学校までと同じ意味に用いる．ここではこれらの言葉の使い方を，場合分けによって表の形に整理してみよう．以下とくにことわりがなければ p，q，r などは命題あるいは条件を表す．与えられた命題が成り立つことを，その命題が**真**（true）であるともいう．成り立たないことを，その命題が**偽**（false）であるともいう．真，偽の代わりに T，F（あるいは 1，0）という記号を用いることもある．T，F を**真理値**ということもある．

- p が偽で q も偽のとき，$p \vee q$ は偽である．
- p が偽で q は真のとき，$p \vee q$ は真である．
- p が真で q は偽のとき，$p \vee q$ は真である．
- p が真で q も真のとき，$p \vee q$ は真である．

表 2.1　場合分けによる「または」の意味のまとめ

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

表 2.2　「または」の真理値表

表 2.1 を簡潔に，表 2.2 のように表す．表 2.2 を「または」の**真理値表**という．q の列と $p \vee q$ の列の間の縦線は必須ではないが，見やすくするために引いた．ここでは，縦線の左側の命題の真偽が決まると右側の命題の真偽が決まるという気持ちを込めて縦線を引いた．以下ではこのような意図に基づく場合のほか，単に表を見やすくするために縦線を引くこともある．さて，「または」の真理値表と同様にして，「かつ」の真理値表および，否定の真理値表を書くことができる．以下に示そう．

- p が偽で q も偽のとき，$p \wedge q$ は偽である．
- p が偽で q は真のとき，$p \wedge q$ は偽である．
- p が真で q は偽のとき，$p \wedge q$ は偽である．
- p が真で q も真のとき，$p \wedge q$ は真である．

表 2.3　場合分けによる「かつ」の意味のまとめ

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表 2.4　「かつ」の真理値表

- p が偽のとき，$\neg p$ は真である．
- p が真のとき，$\neg p$ は偽である．

表 2.5　場合分けによる，否定の意味のまとめ

p	$\neg p$
F	T
T	F

表 2.6　否定の真理値表

ここまでの真理値表は，すでに知っている言葉（「または」，「かつ」，否定）の使い方の意味を，場合分けによって整理したものであった．ここからは，与えられた命題の真偽を調べるための道具としても真理値表を活用しよう．とくに，次のような問題を考察する．

- 与えられた命題がどのような場合に真となり，どのような場合に偽となるかを調べよ．
- 与えられた二つの命題の真偽が一致するかどうか調べよ．

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
F	T	T
T	F	T

表 2.7

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
F	T	F
T	F	T

表 2.8

□ **例題 2.1** 真理値表を書いて，命題 $p \vee \neg p$ は真であることを確かめよ．

解　真理値表は表 2.7 の通りである．$p \vee \neg p$ の列には T だけが並んでいる．つまり $p \vee \neg p$ は真である．

□ **例題 2.2** 真理値表を書いて，p と $\neg\neg p$ の真偽が一致することを確かめよ．

解　真理値表は表 2.8 の通りである．どの行においても，p の列と $\neg\neg p$ の列には同じものが並んでいる．つまり p と $\neg\neg p$ の真偽は一致する．

真理値表のどの行においても二つの命題 f と g の真偽が一致するとき，f と g は（真理値表の意味で）同値であるという．以下とくにことわりのない限り，この資料の中で命題の「同値」は上記の意味とする．

□ **例題 2.3** $(p \vee q) \vee r$ がどのような場合に真となり，どのような場合に偽となるかを調べよ．

考え方　堅苦しく考える前に常識を働かせて，$(p \vee q) \vee r$ が真になるのは p，q，r の少なくとも一つが真になる場合に違いない，と予想する．そして心の中で $p \vee q$ を s という一つの命題だと思ってみよう．

解　p，q，r，$p \vee q$，$(p \vee q) \vee r$ という 5 つの列をもつ真理値表を書く．p，q，r の真偽の組合せの各々に対して，残り二つの真偽が決まる．答は表 2.9 の通りである．

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

表 2.9

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T

表 2.10

□ **例題 2.4** $(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$ は同値であることを示せ．

解　p，q，r，$p \vee q$, $q \vee r$，$(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$ という 5 つの列をもつ真理値表を書いて，表 2.10 を得る．どの行においても，$(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$ の真偽は一致している．つまりこれら二つは同値である．

□ **例 2.5**（書籍本体の例 1.1.5 に対応）例題 2.4 および，それと同様の議論によって以下の法則を得る．

結合法則（結合律）　$(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$ は同値である．　$(p \wedge q) \wedge r$ と $p \wedge (q \wedge r)$ も同値である．

交換則（交換律）　$p \vee q$ と $q \vee p$ は同値である．　$p \wedge q$ と $q \wedge p$ も同値である．

べき等法則（べき等律）　$p \vee p$ と p は同値である．　$p \wedge p$ と p も同値である．

分配法則（分配律）　$(p \vee q) \wedge r$ と $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ は同値．　$(p \wedge q) \vee r$ と $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ も同値．

□ **例 2.6**（書籍本体の例題 1.1.3 および問 1.1.2 に対応）例題 2.4 と同様の議論によって以下の法則を得る．

命題に関するド モルガンの法則　$\neg(p \vee q)$ と $\neg p \wedge \neg q$ は同値である．　$\neg(p \wedge q)$ と $\neg p \vee \neg q$ も同値である．

3　命題論理の「ならば」

前節で，まずすでに知っている言葉（「または」，「かつ」，否定）の使い方の意味を整理するために真理値表を用いた．次に，与えられた命題の真偽を調べるための道具としても真理値表を活用した．ここで，真理値表の使い方をもう一つ加える．真理値表を使って，命題をつなぐ言葉を定義するのである．

■ **定義 3.1** 二つの命題をつなぐ言葉「$\rightarrow$」の意味を表 3.1 によって定める．

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

表 3.1　「ならば」の真理値表

x	y	$x \leq y$?
0	0	Yes
0	1	Yes
1	0	ここだけ No!
1	1	Yes

表 3.2　「ならば」の真理値表の覚え方

「$\rightarrow$」を命題論理の「ならば」という．p が T で q が F のときだけ $p \rightarrow q$ が F になる．このことを確実に暗記するには表 3.2 を思い浮かべるとよいだろう．表のラベル p, q をそれぞれ変数 x, y で置き換え，第 1 列と第 2 列の T，F をそれぞれ 0，1 で置き換える．そして，$p \rightarrow q$ を「$x \leq y$?」で置き換える．$x = 1$，$y = 0$ のときだけ，この不等式が成り立たない．より視覚的に覚えたい人には，以下の論文が参考になるだろう[*1]．

[S2018] Toshio Suzuki: "Visualization of set inclusion with gloves,"
CEUR Workshop Proceedings Vol-2116.
`http://ceur-ws.org/Vol-2116/`

□ **例題 3.1** 真理値表に基づいて，$p \rightarrow p$ は真であることを説明せよ．

解　p が F のときは，$p \rightarrow p$ の左側の p が F だから，表 3.1 の第 1，第 2 行により $p \rightarrow p$ は T である．p が T のときは，$p \rightarrow p$ の右側の p が T だから，表 3.1 の第 2，第 4 行によりにより $p \rightarrow p$ は T である．

[*1] 若干，英語のミスが残っている点はご寛恕いただければ幸いである．

□ **例 3.2**（書籍本体の例 1.1.7，例題 1.1.4，例題 1.4.3 に対応）真理値表を書くことにより，以下を得る．

(1) $p \to q$ と $\neg p \vee q$ は同値である．

(2) $(p \to q) \wedge (q \to p)$ と $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ は同値である．

(3) $\neg(p \to q)$ と $p \wedge \neg q$ は同値である．

(4) $p \to q$ と $\neg q \to \neg p$ は同値である．

□ **例題 3.3** p と $p \to q$ がともに真であるとする．このとき q も真であることを確かめよ．

解　表 3.1 において p と $p \to q$ がともに T となるのは第 4 行のみである．第 4 行では q も T である．

□ **例題 3.4** $x \neq x$（つまり，「$x = x$」の否定）を $p(x)$ と表そう．$q(x)$ は x についての条件であるとする．このとき，$p(x) \to q(x)$ は真である．

解　$p(x)$ を単に p と書くことにする．x に何を代入するかに関わらず，p は F になる．このとき表 3.1 において第 1 行と第 2 行だけしか起こりえない．第 1 行と第 2 行では，$p \to q$ は T である．

x に何を代入しても条件 $p(x)$ が F になる場合，例題 3.4 と同様にして $p(x) \to q(x)$ は T になる．

中学校では，偽な命題から何を導ける（証明できる）のか追求しなかったであろう．我々は「導く」という概念を拡張する．偽な命題からは，なんでも導くことができるものとする．説明抜きに結論だけ言うと，命題 p，q について，「p から q を導ける」と「$p \to q$ が成り立つ」のは同じことだと思ってよい．

4　書籍本体セクション 1.2 以降と本資料の整合性

書籍本体セクション 1.2（集合）以降で，ときおり書籍本体サブセクション 1.1.5 の命題論理の規則を参照している箇所がある．それらの箇所を，本資料に基づく説明で置き換えるのは難しくない．例を示す．

書籍本体 p.48，例 1.2.3 の後「$x \in A \to x \in A$」，「$x \in \emptyset \to x \in A$」ほか：本資料の例題 3.1 および，例題 3.4 直後の段落を見よ．

書籍本体 p.49，セクション 1.2 の最終段落「二重否定の除去を用いて」： 本資料の例題 2.2 を見よ．

書籍本体 p.55，例題 1.4.1 の解「「ならば」命題の否定の言い換え（例題 1.1.4）」：本資料の例 3.2 (3) を見よ．

書籍本体 p.57，例題 1.4.3（対偶）：本資料の例 3.2 (4) を見よ．

COLUMN　真理値表の効能と副作用

薬を飲んですぐに鼻水が止まったものの，喜びもつかの間，眠くて困った経験はないだろうか．身も蓋もない話をすると，真理値表はそういう薬と似ている．たとえば，書籍本体の「または」の導入規則・除去規則に比べ，「または」の真理値表は簡単である．最初のうち，真理値表は「すぐ効くよい薬」だ．ところが，「ならば」の真理値表に入ったあたりで頭がぼーっとなってくる．「ならば」の真理値表で眠くなる最大の理由は，すでに見覚えのある言葉「ならば」の定義を上書きしているにも関わらず，中学や高校で学んだ「ならば」との整合性がわかりにくいことにある．その点，書籍本体の「ならば」の導入規則・除去規則は明晰である．とくに導入規則で次のように明言している「p から q を導けるとき，$p \to q$ を導くことができる．」