HF 上のデルタ 1 関係

鈴木登志雄　　首都大学東京 理工学研究科

2017 年 8 月 6 日（8 月 22 日改訂）

計算モデル同士の等価性証明を知らなくても計算可能性理論を楽しむことはできるが，そう言われるとかえって知りたくなるものである。

本稿では計算モデル同士の等価性について，HF 上のデルタ 1 関係を軸に解説する。最初の節ではとくに集合論的なものの見方を強調せず，計算モデル同士の等価性を直接証明する。第 2 節では，計算可能性の変種と呼び名について注意を述べる。

第 3 節から第 5 節では，HF 上のデルタ 0 関係および HF 上のデルタ 1 関係の概念を紹介する。HF 上のデルタ 1 関係を基軸通貨にして，計算モデル同士の等価性を証明できるようになるのが目標である。

『キューネン数学基礎論講義』[2] の第 IV 章「再帰理論」では，集合論の枠組みで計算可能性を厳密に解説している。そこでの最重要キーワードが HF 上のデルタ 1 関係である。しかし，[2] は誠実に記述してあるがゆえに，敷居が高いかもしれない。本稿が想定する読者像は，公理的集合論の本，たとえば [1, 4] をゲーデルの L が登場するあたりまで眺めたことがあるが L の定義がいまひとつ腑に落ちない，なおかつ [2] の第 IV 章を眺めたことがあるがまだよくわからない，しかしわかりたい！という人である。

公理的集合論に不慣れな人は最初の通読のとき, * のついた項目を読み飛ばすとよい。*付きの項目以外は，大学の学部初年級の集合論の予備知識，たとえば [3] で足りるようにしてある。ただし正確な理解には*付きの項目が必要である。節全体に*が付いているのは第 3 節だけである。

非負整数を自然数とよび，自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を ω で表す。また，論理式について述べるとき，とくに断りがなければ等号をもつ 1 階述語論理において，語彙 $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$ を考える。

1　等価性の直接証明

本節では複数の計算モデルの等価性を示す直接的な方法を例示する。計算モデルの例として，まずレジスター マシン [5, §2.3]（以下，略称 Rm）をみる。Rm はレジスター $R_1, R_2, \ldots$ をもち，これらは自然数 $r_1, r_2, \ldots$ を格納する。Rm は 4 種の基本命令をもつ。行番号付きの基本命令を有限個並べたものを **Rm プログラム**という。

Rm の基本命令

r_n = 0　/* R_n の内容を 0 にする。 */

r_n = r_n + 1　/* R_n の内容をインクリメント */

r_n = r_m　/* R_n に R_m の内容を上書き */

`if(` r_n `==` r_m `){ goto k; }`　/* R_n と R_m の内容が等しいなら k 行目にジャンプ */

定義 1.1　$f : \omega^k \to \omega$ とする。

(1) Rm プログラム P が関数 f を**計算する**とは，任意の $(x_1, \ldots, x_k) \in \omega^k$ に対して以下が成り立つことをいう。$r_1 = x_1, \ldots, r_k = x_k, r_n = 0$　$(n > k)$ としてプログラム P を実行すると，基本命令を有限回実行した後にマシンは停止し，しかもそのとき $r_1 = f(x_1, \ldots, x_k)$ となる。

(2) f が **Rm で計算可能である**とは，f を計算する Rm プログラムが存在することをいう。

集合 $A \subset \omega^k$ の特性関数 $\chi_A : \omega^k \to \{0, 1\}$ を以下のように定める。

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{If } x \in A \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

定義 1.2 $A \subset \omega^k$ とする。A が **Rm で計算可能である**とは，A の特性関数 χ_A を計算する Rm プログラムが存在することをいう。

例 1.1 関数 $f(x, y) = x + 2y$ を計算する Rm プログラムの例。

```
1:  if( r2 == r3 ){ goto 6; }
2:   r1 = r1 + 1
3:   r1 = r1 + 1
4:   r3 = r3 + 1
5:  if( r1 == r1 ){ goto 1; }
```

Rm の代わりに Tm を用いても，同様にして「Tm で計算可能」という概念を定義できる。

定理 1.3 $f : \omega^k \to \omega$ とする。以下は同値である。

(1) f は Rm で計算可能。

(2) f は多テープ Tm で計算可能。

(3) 1 テープかつ，テープ記号が 1 と空白記号のみの Tm で f を計算可能。

証明の概要 (1) $\to$ (2) の証明：例として $f(x, y) = x + 2y$ の場合について述べる。一般の場合も同様。例 1.1 のプログラムを P とする。P は f を計算する。P をシミュレートする多テープ Tm を，以下の方針で作ることができる。作業用テープ T_1 をプログラムカウンタとする，すなわち，次に実行すべき P の行を T_1 に保持する。作業用テープ T_{i+1} $(i = 1, 2, 3)$ でそれぞれ P のレジスタ R_i をシミュレートする。P の第 j 行 $(j = 1, \ldots, 5)$ のために，いくつかの状態 $q_{j,1}, \ldots, q_{j,k_j}$ を用意しておく。

(2) $\to$ (3) の証明：k テープ Tm　M_1 が与えられたとする。区切り記号を用い，各瞬間の M_1 のテープの内容を 1 つのテープに記入することにして，1 テープ Tm　M_2 を作り，M_1 をシミュレートできる。さらに，以下の方針により，1 テープかつテープアルファベットが 1 と空白記号のみからなる Tm　M_3 を作り，M_2 をシミュレートできる。M_2 のテープアルファベットの各文字 a_i に文字コード 1^{i+1} を与え，M_2 の各状態 q_j のために，M_3 のいくつかの状態 $q_{j,1}, \ldots, q_{j,k_j}$ を用意しておく。

(3) $\to$ (1) の証明：1 テープかつテープアルファベットが 1 と空白記号のみからなる Tm　M_1 が与えられたとする。M_1 をシミュレートする C 言語風擬似コードを容易に書ける。それをシミュレートする Rm プログラムを書くのは，むずかしくない。□

2　計算可能性の変種と呼び名

定義 1.1 で，関数が Rm で計算可能であるとはどういうことか定義した。Rm の代わりにチューリング計算機を用いても同値になるので，以下，単に計算可能とよぶ。

ところで，これはふつうの関数，すなわち**全域的関数**（total function）についての計算可能性である。計算可能性を論じているときは，しばしば**部分関数**（partial function）を考察する。

f が ω^k から ω への部分関数であるとは，ω^k のある部分集合 A があって，f が A から ω への関数であることをいう。

このような概念を考えるわけは，先にプログラムを与え，その後で，このプログラムはどんな関数を計算するか考察することがあるからである。プログラムは特定の入力に対して無限に動き続け，出力をしないことがある。このような入力は，関数の定義域に属さないと考える。

定義 2.1 f は ω^k から ω への部分関数であるとする。

(1) Rm プログラム P が部分関数 f を**計算する**とは，任意の $(x_1, \ldots, x_k) \in \omega^k$ に対して以下が成り立つことをいう。

$(x_1, \ldots, x_k)$ が f の定義域に属するときは，$r_1 = x_1, \ldots, r_k = x_k, r_n = 0$　$(n > k)$ としてプログラム P を実行すると，基本命令を有限回実行した後にマシンは停止し，しかもそのとき $r_1 = f(x_1, \ldots, x_k)$ となる。

$(x_1, \ldots, x_k)$ が f の定義域に属さないときは，$r_1 = x_1, \ldots, r_k = x_k, r_n = 0 \quad (n > k)$ としてプログラム P を実行すると，P はいつまでも動き続ける（この場合，P の出力はないとみなす)。

(2) 部分関数 f が **Rm で計算可能である**とは，f を計算する Rm プログラムが存在することをいう。

定理 1.3 と同様な主張は，部分関数についても成り立つ。

計算可能な部分関数と区別する意味で，定義 1.1(2) の条件をみたす f を計算可能な全域的関数ということがある。

単に計算可能な関数（computable function）といったとき，計算可能な全域的関数と計算可能な部分関数の**どちらを意味するかは，文献によって違う**。そのとき自分が読んでいる本がどちらの定義を採用しているのか確認する癖をつけたい。

さて，Rm プログラム P が集合 $A \subset \omega^k$ の特性関数 χ_A を計算するとは以下が成り立つことである。ただし「入力 x $(\in \omega^k)$ に対して P が有限ステップで停止して m を出力する」という主張を「$P(x)\downarrow= m$」と略記する。

$$\begin{cases} x \in A & \Rightarrow \; P(x)\downarrow= 1 \\ x \notin A & \Rightarrow \; P(x)\downarrow= 0 \end{cases} \tag{1}$$

このような P が存在するとき，A を計算可能な集合というのであった。

(1) の部分関数バージョンとよぶべき条件も考えられている。ただし「入力 x $(\in \omega^k)$ に対して P は有限ステップで停止しない」という主張を「$P(x)\uparrow$」と略記する。

$$\begin{cases} x \in A & \Rightarrow \; P(x)\downarrow= 1 \\ x \notin A & \Rightarrow \; P(x)\uparrow \end{cases} \tag{2}$$

このような P が存在するとき，A を **recursively enumerable 集合（r.e. 集合）**，あるいは **computably enumerable 集合（c.e. 集合）**という。和訳は**帰納的可算集合，再帰的可算集合，枚挙可能集合**などである。

(1) や (2) と似た条件として，以下の条件もよく考察される。

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; P(x)\downarrow= 1 \tag{3}$$

このような P が存在することと，A が c.e. 集合であることは同値である。また，A が計算可能ならば A は c.e. 集合である。

プログラム P がどんな入力に対しても有限ステップで停止して 0 か 1 を出力する（0 と 1 のどちらを出力するかは入力に依存してよい）場合，(1) と (3) は同値になる。

このように，一定の条件の下で (1)，(2)，(3) のうち二つ以上が同値になることはあるが，一般にはこれら三つの条件を区別する必要がある。

三つの条件 (1)，(2)，(3) を**どのような名前で呼び分けるかは，文献によって違う**。

たとえば [7] の用語に従うと，(1) は「P は A を判定する（decide)」，(3) は「P は A を認識する (recognize)」となる。

しかし他の文献では decide が「決定する」になっていることもあるし，decide や recognize が少し違う意味で使われていることもある。やはり，そのとき読んでいる本の定義を確認するしかない。

Computability theory, recursion theory, theory of computing, theory of computation などとよばれる分野の総体は複数の起源をもち，複数の学問分野にまたがって発展してきた。理学と工学が交錯するところが，また魅力である。基本的かつ重要な概念に方言が多いのは困ったことであるが，ある程度やむを得ないことなのかもしれない。

3 「定義可能な集合」の定義*

ゲーデルの L を定義するとき，定義可能な集合の概念を用いたことを思い出そう。これは簡単そうでいて，なかなか手ごわい概念である。

人間が紙に書く論理式を便宜上，「本物の論理式」とよぼう。また，本物の論理式の変数 v_i の添え字

として現れる自然数 i や本物の論理式に出現する記号の個数として現れる自然数を便宜上,「本物の自然数」とよぼう（メタ言語における自然数)。適当な文字コードを設定することにより，本物の論理式を，本物の自然数を用いてコーディングできる。こうして，本物の論理式のコード（となる本物の自然数）全体の集合 $\mathcal{FML}_{\mathcal{L}_\in}$ を得る。

ここで上記定義の真似をすることにより，形式体系としての集合論，たとえば ZF において集合 $\mathrm{FML}_{L_\in}$ を定義する。つまり本物の論理式 Ψ をうまく選んで $x \in \mathrm{FML}_{L_\in} \leftrightarrow \Psi(x)$ とする。このような文脈では，x の代わりにたとえば φ を用いて $\varphi \in \mathrm{FML}_{L_\in} \leftrightarrow \Psi(\varphi)$ と書いたりする．この φ は本物の論理式ではなく，本物の変数である。形式体系の中では，φ は論理式（のコードとなる自然数）である。しかし混乱のおそれがなければ φ を論理式とよぶ。

さて, $S \subset X$ とする。「S は X (すなわち $\langle X, \in\rangle$) で定義可能」の定義は，以下の通りであった。

$$\exists\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \mathrm{Fml}_{L_\in}\ \exists a_1,\ldots,a_{n-1} \in X \\ S = \{a \in X : X \vDash \varphi(a, a_1 \ldots, a_{n-1})\} \quad (4)$$

そして，$\mathrm{Def}(X)$ を以下のように定義した [4, p.123]。

$$\mathrm{Def}(X) = \{S \in \mathcal{P}(X) : S \text{ は } X \text{ で定義可能 }\} \quad (5)$$

[4, 3.3 節] は [1, 第 IV 章 10 節] 同様，モデルの理論を ZF の内側で定式化しており，我々もいま，この方式に従っている。すると，ここがややこしいところなのであるが, (4) は

$$\exists\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \mathrm{Fml}_{L_\in} \exists a_1 \in X \ldots \exists a_{n-1} \in X \\ S = \{a \in X : X \vDash \varphi(a, a_1 \ldots, a_{n-1})\} \quad (6)$$

（を省略抜きに書いた本物の論理式）の略記**ではない**。

n 変数論理式全体の集合を $\mathrm{Fml}_{L_\in,n}$ で表し，$u^\frown v$ で二つの列の連接を表そう。たとえば $\langle 192\rangle^\frown\langle 0397\rangle = \langle 1920397\rangle$。(4) は（たとえば）

$$\exists n \in \omega \exists\varphi \in \mathrm{Fml}_{L_\in,n} \\ \exists\, b\,\bigl(b \text{ は } n-1 \text{ から } X \text{ への関数 } \wedge \\ S = \{a \in X : X \vDash \varphi(\langle a\rangle^\frown b)\}\bigr) \quad (7)$$

（を省略抜きに書いた本物の論理式）の略記である。

(6) において，a_{n-1} は本物の変数であり，その添え字 $n-1$ は本物の自然数である。

一方 (7) において，n と b は本物の変数である。n は形式体系の中で自然数とされている。同様に，b は形式体系の中で，X の要素を $n-1$ 個並べた列すなわち，$n-1 = \{0, 1, \cdots, n-2\}$ から X への関数とされている。

(5) を書き直すと以下の通りとなる。

$$\mathrm{Def}(X) = \{S \in \mathcal{P}(X) : \exists n\ \exists\varphi\ \exists b\bigl[n \in \omega \wedge \\ \varphi \in \mathrm{Fml}_{L_\in,n} \wedge b \text{ は } n-1 \text{ から } X \text{ への関数} \\ \wedge S = \{a \in X : X \vDash \varphi(\langle a\rangle^\frown b)\}\ \bigr]\ \} \quad (8)$$

4　HF 上のデルタ 0 関係

まず HF 上のデルタ 0 関係を定義し，その拡張として次節で HF 上のデルタ 1 関係を定義する。

定義 4.1 V_ω を次のように定義する。

(1) $V_0 = \emptyset$ とする。

(2) 集合族 V_n のべき集合を V_{n+1} とする。

(3) $V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$ とする。

定義 4.2 (1) 集合 A が推移的（transitive）であるとは，$\forall x \in A\ x \subset A$ が成り立つことをいう。

(2) $\mathrm{HF} = \{x : x \subset A$ となる推移的な有限集合 A が存在する $\}$ とする。

ZF 集合論においては，$\mathrm{HF} = V_\omega$ である。

定義 4.3 (1) x, y が変数のとき，以下二つはデルタ 0 論理式である。

$x = y,\ x \in y$

(2) φ, ψ がデルタ 0 論理式のとき，以下の各々もデルタ 0 論理式である。

$\neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi$

(3) φ がデルタ 0 論理式で y, z が変数のとき，以下の各々もデルタ 0 論理式である。これらの式において，z を束縛変数という。

$\exists z(z \in y \wedge \varphi)$（これを $\exists z \in y\ \varphi$ と略記する。）

$\forall z(z \in y \to \varphi)$（これを $\forall z \in y\ \varphi$ と略記する。）

(4) 以上によってできたもののみがデルタ 0 論理式である。

定義 4.4 n が自然数，φ が n 変数デルタ 0 論理式で，$a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{HF}$ であるとする。このとき，集合

$$\{a \in \mathrm{HF} : \varphi(a, a_1 \ldots, a_{n-1})\} \tag{9}$$

を HF 上のデルタ 0 関係という。

注*：定義 4.3, 4.4 は，初心者向けの善意のごまかしを含んでいる。より正確には，(9) は以下のようにすべきである。

$$\{a \in \mathrm{HF} : \mathrm{HF} \vDash \varphi(a, a_1 \ldots, a_{n-1})\}$$

ただし HF は推移的であるから，φ が n 変数 Δ_0^{ZF} 論理式で $a \in \mathrm{HF}^n$ のとき，$\mathrm{HF} \vDash \varphi(a)$ と $\varphi(a)$ は同値である。ある程度公理的集合論を知っていて，さらに正確に話を進めたい人は第 3 節のようにすればよい。

例 4.1 (1) 以下の各々は HF 上のデルタ 0 関係である。

$\mathrm{Diag}_= = \{\langle x, x\rangle : x \in \mathrm{HF}\}$

$\mathrm{Diag}_\in = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathrm{HF}, x \in y\}$

(2) $A, B \subset \mathrm{HF}$ が HF 上のデルタ 0 関係のとき，以下の各々も HF 上のデルタ 0 関係である。

$\mathrm{HF} - A\ (= \{x \in \mathrm{HF} : x \notin A\})$，$A \cup B$, $A \cap B$

(3) $A \subset \mathrm{HF}$ が HF 上のデルタ 0 関係のとき，以下の各々も HF 上のデルタ 0 関係である。

$\{\langle x, y\rangle : \exists z \in y\ \langle x, y, z\rangle \in A\}$,

$\{\langle x, y\rangle : \forall z \in y\ \langle x, y, z\rangle \in A\}$

たとえば (1) の $\{\langle x, x\rangle : x \in \mathrm{HF}\}$ と $\{\langle x, x\rangle \in \mathrm{HF} : x \in \mathrm{HF}\}$ が等しいことは容易に証明できる。このような文脈でコロン (:) の左にある「$\in \mathrm{HF}$」は，省略する。

与えられた関係が HF 上のデルタ 0 関係であるかどうかは，厳密にいえば集合論の公理の選び方に依存する。しかし，本稿で扱う範囲では，ZF 集合論の適当な部分体系で十分である。本稿では，いかなる集合論の公理の下で考えているか，あまり気にしないことにする。

例題 4.2 以下の各々が，x のみを自由変数とする（しかも定数記号なしの）HF 上のデルタ 0 論理式と同値であることを示せ。

(1) $x \in \emptyset$

(2) $\emptyset \in x$

(3) $x = \emptyset$

(4) $x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in x$

(6) $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

解　(1) $x \in \emptyset$ はデルタ 0 論理式 $x \neq x$ と同値。

(2) $\emptyset \in x$ はデルタ 0 論理式 $\exists y \in x \forall z \in y\ z \neq z$ と同値。

(3) $x = \emptyset$ は以下のデルタ 0 論理式と同値。

$\forall y \in x\ y \neq y$

(4), (5), (6) 上記 (1)，(2), (3) により $x \in \emptyset$, $\emptyset \in x$ および $x = \emptyset$ は，x のみを自由変数とする（しかも定数記号なしの）あるデルタ 0 論理式と同値。いま $a = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\} \in \mathrm{HF}$ とし，a の各元 b に対して，$x \in b$，$b \in x$ と $x = b$ はそれぞれ，デルタ 0 論理式 $\varphi_b(x)$，$\psi_b(x)$, $\theta_b(x)$ と同値であるとする。

このとき $x \in a$ は以下のデルタ 0 論理式と同値である。

$$\theta_{b_0}(x) \vee \cdots \vee \theta_{b_{n-1}}(x) \tag{10}$$

$x = a$ は以下のデルタ 0 論理式と同値である。

$$[\forall y \in x(\theta_{b_0}(y) \vee \cdots \vee \theta_{b_{n-1}}(y))] \wedge \\ (\exists y \in x\ \theta_{b_0}(y)) \wedge \cdots \wedge (\exists y \in x\ \theta_{b_{n-1}}(y)) \tag{11}$$

$a \in x$ は $\exists y \in x\ y = a$ と同値であるから，デルタ 0 論理式と同値である。以上の作業を繰り返せば (4)，(5)，(6) を示せる。 □

問 4.1 以下の各々が HF 上のデルタ 0 関係であることを示せ。

(1) $x \subset y$ （この関係を集合の形で書くと $\{\langle x, y\rangle \in \mathrm{HF}^2 : x \subset y\}$。以下同様。）

(2) $y = \bigcup x$

(3) $z = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ （右辺は x, y のクラトウスキ順序対）

(4) x は推移的集合

(5) x は $\in$ によって全順序集合になっている（すなわち，$\langle x, \in\rangle$ が全順序集合）

(6) x は $\in$ によって整列順序集合になっている

(7) x は順序数

(8) x はフォン ノイマン自然数

5 HF 上のデルタ 1 関係

定義 5.1 (1) $R \subset \mathrm{HF}$ が HF 上のシグマ 1 関係であるとは，

デルタ 0 論理式 $\varphi(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ と $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{HF}$ が存在して以下が成り立つことをいう。$R = \{x : \exists y \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y, a_1, \ldots, a_{n-1})\}$

以下ではこの種の主張を述べるとき，誤解のおそれがなければパラメータ（$a_1, \ldots, a_{n-1}$）を略して以下のように表す。「デルタ 0 論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して以下が成り立つことをいう。$R = \{x : \exists y \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y)\}$」

(2) $R \subset \mathrm{HF}$ が HF 上のパイ 1 関係であるとは，R の補集合が HF 上のシグマ 1 関係であることをいう。これは，デルタ 0 論理式 $\psi(x, y)$ が存在して以下が成り立つことと同値である。$R = \{x : \forall y \in \mathrm{HF}\ \psi(x, y)\}$

(3) $R \subset \mathrm{HF}$ が HF 上のデルタ 1 関係であるとは，R が HF 上のシグマ 1 関係であり，かつ，HF 上のパイ 1 関係でもあることをいう。これは，デルタ 0 論理式 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ が存在して以下が成り立つことと同値である。$R = \{x : \exists y \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y)\} = \{x : \forall y \in \mathrm{HF}\ \psi(x, y)\}$

HF 上のシグマ 1 に限らず，ナントカシグマ 1 という概念を定義するときに共通する作法がある。それに従えば，定義 5.1 (1) は，本来は以下のようにすべきである「デルタ 0 論理式 $\varphi(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ が存在して以下が成り立つことをいう。$R = \{x : \exists y_1 \cdots \exists y_{n-1} \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y_1, \ldots, y_{n-1})\}$」しかし $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathrm{HF}$ ならば $\langle y_1, \ldots, y_{n-1}\rangle \in \mathrm{HF}$ となるので，見た目がより単純な定義を採用した。

補題 5.2 $A \subset \omega$ に対し，以下は同値である。

(1) A はチューリング計算可能。

(2) A は HF 上のデルタ 1 関係である。

証明の概要 (1) → (2) の証明：Tm M で，以下の性質をもつものを一つ固定する。「M はどんな入力 x に対しても有限ステップで停止し，$x \in A$ の場合は 1 を出力し，そうでない場合は 0 を出力する」すると，以下が成り立つ。

$x \in A$

$\Leftrightarrow \exists u$ [u は M の計算過程であり，その入力は x，最後は停止して 1 を出力している。]

$\Leftrightarrow \forall u$ [もし u が M の計算過程であり，その入力が x，かつ最後は停止して何かを出力しているならば，その出力は 1 である。]

したがって，A は HF 上のデルタ 1 である。

(2) $\to$ (1) の証明：デルタ 0 論理式 φ, ψ が存在して，A は以下二つのいずれとも等しいとする。$\{x : \exists y \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y)\}$，$\{x : \forall y \in \mathrm{HF}\ \psi(x, y)\}$。

このとき，A の補集合は $\{x : \exists y \in \mathrm{HF}\ \neg\psi(x, y)\}$ と等しい。

次のようなアルゴリズムを考える。入力 x に対し，まず $y = 0$ とする。

$\varphi(x, y)$ が成り立つ場合は 1 を出力して終了する。ここで終了しないとき，もし $\neg\psi(x, y)$ が成り立つなら 0 を出力して終了する。

まだ終了していない場合は，y の値を一つ増やして上記を行う。以下，終了するまで同様に繰り返す。

このアルゴリズムは有限ステップで停止する。しかも，$x \in A$ なら 1 を，$x \notin A$ なら 0 を出力する。よって A はチューリング計算可能である。 □

定理 5.3 全域的関数 $f : \omega^k \to \omega$ に対し，以下は同値である。

(1) f はチューリング計算可能。

(2) f のグラフ $G_f = \{\langle \vec{x}, f(\vec{x})\rangle : \vec{x} \in \omega^k\}$ は HF 上のデルタ 1 関係である。

証明の概要　(1) $\to$ (2) の証明：f を計算する Tm　M を一つ固定する。

$f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists u$　[u は M の計算過程であり，その入力は $\vec{x}$，最後は停止して y を出力している。]

$\Leftrightarrow \forall u$　[もし u が M の計算過程であり，その入力が $\vec{x}$，かつ最後は停止して何かを出力しているならば，その出力は y である。]

よって G_f は HF 上のデルタ 1 関係である。

(2) $\to$ (1) の証明：G_f が HF 上のデルタ 1 関係であるとする。補題 5.2 により，G_f はチューリング計算可能である。いま入力 x が与えられたとする。まず $y = 0$ とする。

$\langle x, y\rangle \in G_f$ のとき，y を出力して終了する。

まだ終了していない場合は，y の値を一つ増やして上記を行う。以下，終了するまで同様に繰り返す。

f が全域的なので，このアルゴリズムは必ず有限ステップで停止し，$f(x)$ を出力する。

よって f はチューリング計算可能である。 □

定理 5.4 ω^k から ω への部分関数 f に対し，以下は同値である。

(1) f はチューリング計算可能。

(2) f のグラフ G_f は HF 上のシグマ 1 関係である。

証明の概要　話を簡単にするため $k = 1$ の場合のみ考える。

(1) $\to$ (2) の証明：f を計算する Tm　M を一つ固定する。

$f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists u$　[u は M の計算過程であり，その入力は $\vec{x}$，最後は停止して y を出力している。]

よって G_f は HF 上のシグマ 1 関係である。

(2) $\to$ (1) の証明：G_f が HF 上のシグマ 1 関係であるとする。このとき，ある HF 上のデルタ 0 論理式 φ があって以下が成り立つ。

$G_f = \{\langle x, y\rangle \in \mathrm{HF}^2 : \exists z \in \mathrm{HF}\ \varphi(x, y, z)\}$

カントルの対関数と同様にして $\langle y, z\rangle \in \mathrm{HF}^2$ を一つずつもれなく調べていく。$\varphi(x, y, z)$ をみたす $\langle y, z\rangle$ がみつかったら y を出力して終了する。

x が f の定義域に属するとき，かつ，そのときに限り，上記のアルゴリズムは停止し，そのとき，$f(x)$ を出力する。

したがって，f はチューリング計算可能な部分関数である。 □

6　算術階層との対比

算術階層は次のように定義された。n を自然数とする。$A \subset \omega$ が Σ^0_n に属するとは，ある計算可能な述語 R が存在して以下が成り立つことをいう。

$$m \in A \Leftrightarrow \exists x_1\ \forall x_2 \cdots Qx_n\ R(m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ただし n が 0 のとき $\exists x_1\ \forall x_2 \cdots Q x_n$ の部分はないものとする。n が奇数のとき Q は $\exists$ であり，n が正の偶数のとき Q は $\forall$ であるとする。

A の補集合が Σ^0_n に属するとき，A は Π^0_n に属するといい，$\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$ と定める。

すると $A \subset \omega$ のとき，定理 5.3 により以下が成り立つ。

• $A \in \Delta^0_0$ となるための必要十分条件は，A が HF 上のデルタ 1 関係であることである。

ここでは，下付き添え字が一つずれている（Δ^0_0 の下付き添え字 0 と，HF 上のデルタ 1 の 1)。

しかし次が成り立つことは容易に確かめられる。

• $A \in \Sigma^0_1$ となるための必要十分条件は，A が HF 上のシグマ 1 関係であることである。

• $A \in \Pi^0_1$ となるための必要十分条件は，A が HF 上のパイ 1 関係であることである。

• $A \in \Delta^0_1$ となるための必要十分条件は，A が HF 上のデルタ 1 関係であることである。

参考文献

[1] キューネン（藤田博司 訳）：『集合論』日本評論社，2008。

[2] キューネン（藤田博司 訳）：『キューネン数学基礎論講義』日本評論社，2016。

[3] 鈴木登志雄: 『例題で学ぶ集合と論理』森北出版，2016。

[4] 渕野昌: 「構成的集合と公理的集合論入門」以下に所収：田中一之 編『ゲーデルと２０世紀の論理学（４）』, 東京大学出版会，2007。

[5] Cooper, S. B.: Computability theory. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[6] Jech, T.: Set theory: The third millennium edition, Springer, 2003.

[7] Sipser, M.: 『計算理論の基礎 原著第２版 ２．計算可能性の理論』(太田和夫・田中圭介 監訳）共立出版，2008。

[すずき としお / 首都大学東京 理工学研究科]