ジェネリック次数

隈部正博

２０１７年８月４日

1　前置き

自然数論における Generic な集合のチューリングの意味での決定不能次数（以下単に次数という）について考える．自然数の部分集合 $A \subseteq \omega$ が n-generic(n-ジェネリック) とは, Σ_n^0 論理式において Cohen-generic であるときをいう．次数 $\boldsymbol{a}$ が n-generic であるとは, n-generic な集合となる代表元があるときをいう．次数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ において, $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ とは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の要素 A, B が $A \leq_T B$ を満たすときをいう．ここで, $A \leq_T B$ は A が B-recursive であることを意味する．$D(\leq \boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{b}$ の集合とする．以下主として $\boldsymbol{a}$ が n-generic なときに $D(\leq \boldsymbol{a})$ の構造について考える．

本論文における記号の用い方は標準的である．集合 A, B において, $A \bigoplus B = \{2n \mid n \in A\} \bigcup \{2n+1 \mid n \in B\}$ とする．$0, 1$ の有限列を string という．ω 以外の小文字のギリシャ文字は string を表すのに使う．全ての string を帰納的（computable）に一列に並べこれを固定する．

String σ と ν において, $\sigma \geq \nu$ は, σ が ν の拡張（extension) になっていることを示し, このとき ν は σ の substring という．さらに σ と ν は両立する（comparable, compatible）とは, 一方が他方を拡張しているときをいう．もし σ と ν が両立しないときは, $\sigma \mid \nu$ で表す．集合 $A \subseteq \omega$ はその特性関数と同一視することにする．したがって $\sigma \leq A$ は A の特性関数が string σ を拡張していることを示し, σ は A の始切片という．$\sigma * \nu$ は σ の後に ν をつなげた string を表す．自然数 $0, 1$ は対応する長さ 1 の string $0, 1$ と同一視する．$i = 0, 1$ に対し $[i] = 1 - i$ と定義する．$\emptyset$ は空列を表す．自然数 n に対し, $i^{(n)}$ は長さ n の string σ で, 各 $m < n$ において $\sigma(m) = i$ となるものを表す．String σ の長さを $|\sigma|$ で表す．String σ と ν において, $\sigma \cap \nu$ は, σ の substring λ で, 全ての $m < |\lambda|$ において $\sigma(m) = \nu(m)$ となり, さらに $\sigma(|\lambda|) \neq \nu(|\lambda|)$ となるか, 2つのうち少なくとも一つの値が定義されないときをいう．$n < |\sigma|$ となるとき, $\sigma[n]$ を, 長さ n の σ の substring を表す．全ての（チューリングの意味での）還元オペレーター（reduction operator, Turing functional）を一列にならべ固定し, Φ_n を n 番目の還元オペレーターとする．$\Phi_n(\sigma)(x) = y$ は次のことを意味する．オラクル σ 付きの n 番目の還元オペレーターに $x < |\sigma|$ をインプットしたとき, $|\sigma|$ ステップ以内に計算が終了し, 計算結果 y を出力し, さらに全ての $u < x$ において $\Phi_n(\sigma)(u)$ は定義されるものとする．従って, B が A に還元可能（recursive in A, A-recursive）とは, ある e が存在して, $\Phi_e(A) = B$ となるときをいう．

2　ジェネリックな集合

$\mathcal{L}$ を一階の自然数論の言語で, さらに（各自然数 n に対応する）定数記号 $\tilde{n}$, 集合を表す定数記号 X, そして要素を表す述語記号 $\in$ を含むものとする．ψ を $\mathcal{L}$ における文（sentence）とし, A を ω の部分集合とする．こ

のとき, $A \models \psi$ は, 自然数論の標準モデルで, X を A で解釈することによって, ψ が成り立つことと定義する.

String σ に対して, "σ が ψ を強制する ($\sigma \Vdash \psi$ と書く) とは, 文の長さによる帰納法により以下のように定義される.

If ψ が原始的な文（atomic sentennce）で X を含まないときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, ψ が自然数の標準モデルで成り立つときをいう.

If ψ が $\tilde{n} \in X$ の形のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, $\sigma(n) = 1$ となるときをいう.

If ψ が $\neg\phi$ のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, σ のどんな拡張 ν においても, $\nu \nVdash \psi$ となるときをいう.

If ψ が $\phi_0 \vee \phi_1$ のかたちのときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, $\sigma \Vdash \phi_0$ か $\sigma \Vdash \phi_1$ が成り立つときをいう.

If ψ が $\exists x \phi$ のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, ある n が存在して $\sigma \Vdash \phi(\tilde{n})$ となるときをいう.

そして $A \Vdash \psi$ とは, $\sigma < A$ が存在して $\sigma \Vdash \psi$ となるときと定義する. このとき次のように generic（ジェネリック）な集合を定義する.

定義 2.1 集合 A が generic とは, 任意の $\mathcal{L}$ の文 ψ において, $A \Vdash \psi$ か $A \Vdash \neg\psi$ のどちらかが成り立つときをいう.

Jockusch [1] は generic な集合の特徴づけを以下のように行った.

補題 2.1 Jockusch [1]. 集合 A において以下は同値である.

i. A は generic
ii. どんな算術的な string の集合 S においても, ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない
iii. どんな comeager な算術的な $P(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ においても, $A \in \mathcal{A}$.

証明. $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$ の順に証明する. $(ii) \Rightarrow (i)$. 言語 $\mathcal{L}$ の文 ϕ において, $S = \{\sigma \mid \sigma \Vdash \phi\}$ とする. すると S は算術的. 従ってある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない. もし $\sigma \in S$ ならば $\sigma \Vdash \phi$. もし σ のどんな拡張も S の要素とならないならば, $\sigma \Vdash \neg\phi$.

次に $(i) \Rightarrow (iii)$. 算術的な論理式 ϕ とそれによって定義される comeager な $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ が与えられたとする. すべての generic な集合の集まりは $P(\omega)$ において comeager である. 2 つの comeager な $P(\omega)$ の部分集合の共通部分は再び comeager となるから, どんな σ もその拡張で generic な集合 $A \in \mathcal{A}$ が存在する. このとき, $A \models \phi$ iff $A \Vdash \phi$ が成り立つ. よって $\sigma \Vdash \neg\phi$ となる σ は存在しない. したがって全ての generic な集合 A は ϕ を強制し, よって、再び $A \models \phi$ iff$A \Vdash \phi$ より、$A \in \mathcal{A}$.

次に $(iii) \Rightarrow (ii)$ を証明する. S を算術的な string の集合とする. $\mathcal{A}$ を, 次を満たすような A の集合とする： ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない. すると $\mathcal{A}$ は算術的な $P(\omega)$ の部分集合で comeager となる. S に (iii) を適用することで, (ii) が成り立つ.

集合 A において, A' (the completion of A) は, $\{e \mid \Phi_e(A)(e)\downarrow\}$ と定義される. この completion オペレータを繰り返し適用することで, $A^{(0)} = A$ そして $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ と定義する. この completion オペレータはチューリング次数に関し不変であるため, ジャンプオペレータが定義できる. 従って, 集合 A の次数を a としたとき, $a^{(n)}$ は $A^{(n)}$ の次数を示す. 特に空集合 $\emptyset$ の次数 0 から始め, ジャンプオペレータを用い, 次数の上昇列 $\{0^{(n)} \mid n \in w\}$ を生成することができる. ポストの定理は, B が Δ^A_{n+1} iff B が $A^{(n)}$ にチューリング還元可

能である．算術的な次数とは, ある n が存在して $0^{(n)}$ より小さい次数となるものである．レベル ω において, $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, e\rangle \mid e \in \emptyset^{(n)}\}$ と定義し, この次数を $0^{(\omega)}$ とする．

次に ω 上の関数の集合 $S \subseteq \omega^\omega$ が与えられたとする．a は S の上界であるとは, S の要素の次数はすべて $\leq a$ のときとする．a は S の極小上界であるとは, 上記に加え, $< a$ なる次数は S の上界になりえないときとする．また a は S の一様上界であるとは, ある関数 f が存在し, その次数は $\leq a$ で, さらに, $S = \{f^{[i]} \mid i \in \omega\}$ となるときと定義する, ここで $f^{[i]}$ は $f^{[i]}(x) = f(\langle i, x\rangle)$ によって定義する．AR を算術的な関数の集合とする．

定義に立ち戻って構成すれば, $0^{(\omega)}$ 以下の generic な次数が存在する．

もし A についての算術的な性質で, A の要素の有限個の変化で変わらないものを考えると, 全ての generic な集合は, その性質を満たすか, あるいは全ての generic な集合は, その性質の否定を満たす．しかし A のもつ genericity 全てを仮定する必要はない．そこで制限された弱い genericity を考える．

定義 2.2　集合 A が n-generic とは, $\mathcal{L}$ の全ての Σ^0_n な文 ψ に対し, $A \Vdash \psi$ あるいは $A \Vdash \neg\psi$ が成り立つときをいう．

Jockusch [1] による n-genericity の特徴づけが次である．

補題 2.2　Jockusch [1]. 次は同値である．

i. A が n-generic.
ii. どんな Σ^0_n な string の集合 S に対しても, ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ かあるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない．

証明．最初に (ii) を仮定し (i) を示す．Σ^0_n な文 ψ に対し, $S = \{\sigma \mid \sigma \Vdash \psi\}$ とする．すると S は Σ^0_n な string の集合となる．従ってある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ かあるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない．もし $\sigma \in S$ ならば $A \Vdash \psi$. もしどんな σ の拡張も S の要素とならないならば, $A \Vdash \neg\psi$.

次に (i) を仮定し (ii) を証明する．Σ^0_n な string の集合 S に対し, ψ を, $\psi(X)$ iff $\exists\sigma(\sigma \in S \;\&\; \sigma < X)$ となるようなものとする．すると ψ は Σ^0_n. 従って $A \Vdash \psi$ かあるいは $A \Vdash \neg\psi$. そしてある $\sigma < A$ が存在し, $\sigma \Vdash \psi$ かるいは $\sigma \Vdash \neg\psi$. もし $\sigma \Vdash \psi$ ならば $\sigma \in S$. もし $\sigma \Vdash \neg\psi$ ならば, どんな σ の拡張も S の要素とならない．

$n \geq 1$ とし, GL_n を, 次数 a で $a^{(n)} = (a \cup 0')^{(n-1)}$ となるものの集合とする．また GH_n を, 次数 a で $a^{(n)} = (a \cup 0')^{(n)}$ となるものの集合とする．明らかに全ての n で, $GL_n \subseteq GL_{n+1}$, $GH_n \subseteq GH_{n+1}$, そして全ての i, j で $GL_i \cap GH_j = \emptyset$. 相対化すると $n \geq 1$ において, $GL_n(a)$ を, 次数 $b \geq a$ で $b^{(n)} = (b \cup a')^{(n-1)}$ となるものの集合とする．また $GH_n(a)$ を, 次数 $b \geq a$ で $b^{(n)} = (b \cup a')^{(n)}$ となるものの集合とする．Sacks は全ての n において, $GL_{n+1} - GL_n \neq \emptyset$ また $GH_{n+1} - GH_n \neq \emptyset$ を示した．

補題 2.3
i. $n \geq 1$ において, $0^{(n)}$ 以下で n-generic な次数が存在する．
ii. A が n-generic ならば, $A^{(n)} \equiv_T A \oplus \emptyset^{(n)}$, 従って A の次数は GL_n となる．

証明. (i) string の増加列 σ_n を定義していく．最初に $\sigma_0 = \emptyset$ とする．全ての Σ^0_n 文を帰納的に一列に並べ, ψ_s を s 番目の Σ^0_n 文とする．与えられた σ_s において, もし $\sigma_s \Vdash \neg\psi_s$ ならば $\sigma_{s+1} = \sigma_s * 0$ とせよ．そうでなければ σ_{s+1} を σ_s の拡張で $\sigma_{s+1} \Vdash \psi_s$ を満たすものとする．そして $A = \cup_s \sigma_s$ とする．もし ψ が Σ^0_s 文ならば, 関係 $\sigma \Vdash \psi$ もまた Σ^0_n となる．従って A は $\emptyset^{(n)}$-帰納的となる．

(ii) 関係 $x \in A^{(n)}$ は A 上相対化して $\Sigma^0_n(A)$. 従って $\psi(x, A)$ を Σ^0_n 論理式で, $x \in A^{(n)}$ を定義するものとする. $A \models \psi$ iff $A \Vdash \psi$ だから,

$$k \in A^{(n)} \text{ iff } \exists\sigma(\sigma < A \;\&\; \sigma \Vdash \psi(\tilde{k}, X)).$$

よって $A^{(n)}$ が $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的可算. 同様に,

$$k \notin A^{(n)} \text{ iff } \exists\sigma(\sigma < A \;\&\; \sigma \Vdash \neg\psi(\tilde{k}, X)).$$

よって $A^{(n)}$ の補集合も $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的可算. 従って $A^{(n)}$ は $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的である. $A^{(n)} \geq_T A \oplus \emptyset^{(n)}$ はつねに成り立つから, $A^{(n)} \equiv_T A \oplus \emptyset^{(n)}$ となる.

次の定理は Friedberg の Completeness Criterion の一般化である.

定理 2.1 i. 各 n において, もし $a \geq 0^{(n)}$ ならば, ある n-generic な b が存在して $b^{(n)} = b \cup 0^{(n)} = a$ となる.

ii. もし $a \geq 0^{(\omega)}$ ならば, ある generic な b が存在して $b^{(\omega)} = b \cup 0^{(\omega)} = a$ となる.

証明. (i) A を $a \geq 0^{(n)}$ なる a の要素とする. S_k を k 番目の Σ^0_n な string の集合とする. これから string の拡大列 σ_k を一様に A-帰納的に定義する. そして $B = \cup_k \sigma_k$ が求める b に属する集合であることを示す.

最初に $\sigma_0 = \emptyset$ とする. 与えられた σ_k において, σ'_{k+1} を σ_k の拡張で, σ'_{k+1} が S_{k+1} の要素かあるいは, σ'_{k+1} のどんな拡張も S_{k+1} の要素とならない, そういうものとする. そして $\sigma_{k+1} = \sigma'_{k+1} * A(k+1)$ で $B = \cup_k \sigma_k$ とする. B は n-generic で $A \geq_T \emptyset^{(n)}$ であるから, $B^{(n)} \leq_T B \oplus \emptyset^{(n)} \leq_T A$ となる. $B \oplus \emptyset^{(n)} \geq_T A$ については, $A(k+1)$ を計算するには, まず帰納法の仮定で σ_n は $B \oplus \emptyset^{(n)}$ を使って計算できているとする. $\emptyset^{(n)}$ をオラクルに用い, $\sigma'_{k+1} \geq \sigma_k$ なるもので, σ'_{k+1} が S_{k+1} の要素となるか, あるいは σ'_{k+1} のどんな拡張も S_{k+1} の要素とならない, そのような σ'_{k+1} を探す. すると上記構成によって $A(k+1) = \sigma_{k+1}(|\sigma'_{k+1}|)$ となる. 従って帰納法により $B \oplus \emptyset^{(n)} \geq_T A$ となる.

(ii) は (i) と同様である.

次の命題と定理は 1-generic な次数を計算できる（その下にもつ）次数に関するものである.

命題 2.1 0 でない帰納的可算な次数は, 1-generic な次数を計算できる.

証明. R. Shore による証明を述べる. E を帰納的でない帰納的可算な集合とする. E の要素の帰納的な列挙（recursive enumeration）を $E^s (s \in \omega)$ とする. $f(s)$ の値を, $E^t(s) = E(s)$ となる最小の t とする. このとき $f \equiv_T E$ となる. Σ^0_1 な string の集合を帰納的に一列に並べる方法を固定し, S_n を n 番目の Σ^0_1 な string の集合とする. そして S^t_n をステージ t までに S_n に並べられた要素の有限集合とする.

これより 1-generic な集合 A を string の増加列 $\{\sigma_s\}_{s \in \omega}$ の和として定義する. まず $\sigma_0 = \emptyset$ とする. 与えられた σ_s において, e_{s+1} を (もし存在すれば) 次を満たす最小の $n \leq s$ とする：σ_s は $S^{f(s+1)}_n$ のどの要素の拡張となっていない, さらに $S^{f(s+1)}_n$ は σ_s を拡張する string σ を要素にもつ. もし e_{s+1} が定義されないなら, $\sigma_{s+1} = \sigma_s * 0$ とする. もし e_{s+1} が定義されれば, $\sigma_{s+1} = \sigma * 0$ とする. そして $A = \cup_s \sigma_s$ とする. 明らかに A は E-帰納的である. 以降 A が 1-generic であることを証明する.

背理法により A は 1-generic でないと仮定しよう. そして k を次を満たす最小の数とする：全ての A の切片は S_k の要素とならない, しかし全ての A の切片に対してその拡張で S_k の要素となるものが存在する.

$k_0 \geq k$ を次を満たす最小の数とする：各 $k' < k$ において, $\sigma_{k_0} \in S_{k'}$ かあるいは σ_{k_0} のどんな拡張も $S_{k'}$ の要素とならない．このとき全ての $s > k_0$ で, $e_s \not\leq k$ である．これより帰納的に σ_s と $f(s)$ を $s > k_0$ に関する帰納法で構成する．そうすれば f は帰納的となり矛盾を導く．$s > k_0$ に対し, σ_s と $f(s)$ を計算したとする．この後, 次を満たす t を探す：S_k^t の要素で σ_s を拡張するものが存在する．$e_{s+1} \not\leq k$ なので, $f(s+1) < t$ である．従って $f(s+1)$ は次を満たす最小の $t' < t$ として定義される： $E^{t'}$ の $s+1$ までの制限が E^t の $s+1$ までの制限に等しい．すると $f(s+1)$ を使って, e_{s+1} と σ_{s+1} を上記のように計算できる．従って帰納法により $\{\sigma_s\}_s$ と f は帰納的である．これは矛盾となる．

Jockusch は次のことを示した：GH_1 に属する全ての次数は, その下に 1-generic な次数を持ち, また極小次数も持つ．この前半の結果はさらに次のように改良されている；GL_2 に含まれない全ての次数は, その下に 1-generic な次数を持つ．これを示すためには, 次の補題が必要となる．

補題 2.4 $a \leq b$ とする．このとき次が成り立つ：$b' \geq a^{(2)}$ iff ある関数が存在し, その次数は $\leq b$ でさらに a に含まれる全ての関数を dominate する．

$a \in GL_2$ iff $(a \cup 0')' = a^{(2)}$ であるから, 次の系が成り立つ．

系 2.1 $a \notin GL_2$ iff $a \cup 0' \geq$ なる次数に含まれる関数で, 次数 $\leq a$ の全ての関数を dominate する, そのようなものは存在しない．

定理 2.2 GL_2 に含まれない任意の次数は, その下に 1-generic な次数を持つ．

証明. a を GL_2 に含まれない次数とする．最初に, $f_0(\sigma, e)$ を, もしあれば, 次を満たす最小の数 k, とする：ある $\nu \geq \sigma$ でその長さが $\leq k$ 存在して, $\nu \in S_e^k$ となる．このとき f_0 は部分帰納的関数となる．f を次で定義する：

$$f(n) = \max(\{0\} \bigcup \{f_0(\sigma, e) \mid e \leq n \;\&\; |\sigma| \leq n \;\&\; f_0(\sigma, e) \downarrow\}).$$

このとき f の次数は $\leq 0'$ となる．$a \notin GL_2$ であるから, 系 2.1 により, 次数 $\leq a$ のある関数 g で, f によって dominate されない, そのようなものが存在する．これより 1-generic な集合 B を g-帰納的に, 長さ n の staring の増大列 β_n の和として構成する．最初に $\beta_0 = \emptyset$ とする．帰納法によりステージ n において β_n を定義したとする．ステージ $n+1$ では, e_{n+1} を, 次を満たす (もしあれば) 最小の e とする:

1. e は, ステージ n の終わりまでには, 満足されていない,
2. 長さ $\leq g(n+1)$ のある $\nu_{n+1} > \beta_n$ が存在して, $\nu_{n+1} \in S_e^{g(n+1)}$ となる．

もし e_{n+1} が定義されれば, β_{n+1} を長さ $n+1$ となる ν_{n+1} の部分 string とする．もし $\beta_{n+1} = \nu_{n+1}$ ならば, e_{n+1} はステージ $n+1$ で満足されたという．もし e_{n+1} が定義されないときは, $\beta_{n+1} = \beta_n * 0$ とする．最後に $B = \bigcup_n \beta_n$. とし, 構成が終わる．

B が 1-generic となることを証明するために, 各々の e に対し $s(e)$ で次を満たすものが存在することを証明する ： e はあるステージ $\leq s(e)$ において満足される (従って $\beta_{s(e)}$ は S_e の要素となる string を拡張する), かあるいは, どんな $\beta_{s(e)}$ の拡張も S_e の要素とならない (従って e はどんなステージ $> s(e)$ においても満足されない)．帰納法により各 $e' < e$ において, $s(e')$ が存在するとせよ．まず $s_0 = \max\{s(e') \mid e' < e\}$ とする．s_1 を $> s_0$ なる最小の数で $g(s_1) \geq f(s_1)$ なるものとする．もし e がステージ $s_1 - 1$ の終わりまでに満足され

るか (従って β_{s_1-1} は S_e のある要素を拡張する), あるいはもし β_{s_1} のどんな拡張も S_e の要素とならないならば, そのときは $s(e)=s_1-1$ とする．もし e がステージ s_1-1 の終わりまでに満足されないで, またもし β_{s_1-1} の拡張で S_e の要素となるものが存在すれば, そのときは $g(s_1)\geq f(s_1)$ だから, ある長さ $\leq g(s_1)$ の $\nu_{s_1}>\beta_{s_1-1}$ が存在して, $\nu_{s_1}\in S_e^{g(s_1)}$ となる．よって e は上記 (1) and (2) をステージ s_1 で満足する．ここで $s_1>s_0$ だから, どんな数 $<e$ も (1) and (2) はステージ $\geq s_1$ では満足されない．よって e_{s_1} は定義され e に等しい．すると, $s_1\leq t\leq|\nu_{s_1}|$ なる各 t において, $e_t=e$ で β_t は長さ t の $\nu_{s_1}=\nu_t$ の部分 string となる．従ってステージ $|\nu_{s_1}|$ において, $\beta_{|\nu_{s_1}|}=\nu_{s_1}$ となり, よって e は満足される．$s(e)=|\nu_{s_1}|$ とせよ．よって次が証明された：各 e に対し, ある $s(e)$ が存在し次を満たす：e はあるステージ $\leq s(e)$ において満足されるか, あるいはどんな $\beta_{s(e)}$ の拡張も S_e の要素とならない．従って B は 1-generic となる．

3　ジェネリックな次数の構造

以下 generic な次数の構造について考える．次の命題は, $D(\leq a)$ の理論は generic な a の選び方に依存しないことを示している．

命題 3.1　a と b が generic ならば, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は初等同値である．

証明. ψ を半順序の言語における文とする．このとき $\mathcal{L}$ の文 ϕ が存在して, ψ が $D(\leq a)$ において真である iff $A\models\phi$, が成り立つ．Generic な次数 a が与えられたとし, A を次数 a の generic な集合とする．このときある string σ が存在して, $\sigma\Vdash\phi$ が $\sigma\Vdash\neg\phi$ が成り立つ．もし $\sigma\Vdash\phi$ が成り立つならば, A^* を次のように定義する：σ は A^* の始切片で, 全ての $n\geq|\sigma|$ において, $A^*(n)=A(n)$．すると A^* は generic で, A と同じ次数となる．もし $\sigma\Vdash\phi$ ならば $A^*\Vdash\phi$, 従って $A^*\models\phi$．よって ψ は $D(\leq a)$ において真となる．もし $\sigma\Vdash\neg\phi$ ならば, $A^*\Vdash\neg\phi$, 従って $A^*\models\neg\phi$ となる．よって $\neg\psi$ が $D(\leq a)$ において真となる．a は任意の generic な次数であったから, 任意の generic な a において, ψ が $D(\leq a)$ において真となるか, あるいは任意の generic な a において, ψ は $D(\leq a)$ において偽となる．

a と b が generic なとき, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ が同型になるかどうかは知られていない．

定義 3.1　集合の集まり $\{A_i\}_{i\in I}$ が独立であるとは, 任意の有限部分集合 $F\subseteq I$ と任意の $i\in I-F$ において, $A_i\not\leq_T\oplus\{A_j\mid j\in F\}$ となるときをいう．

与えられた A において, $A_i=\{k\mid\langle i,k\rangle\in A\}$ とする．もし A が 1-generic ならば, $\{A_i\}_{i\in\omega}$ は独立となる．

定理 3.1　Jockusch [1]. 1-generic な次数 a において, $D(\leq a)$ は束ではない．

証明. A を次数 a の 1-generic な集合とする．

$$F_i(A)=\{j\mid\langle 3i+1,j\rangle\in A\ \&\ (\forall k\leq j)[\langle 3i+2,k\rangle\in A]\}.$$

とすると, A は 1-generic なので, A は無限の帰納的可算な部分集合をもたない．従って各 i において, F_i は有限である．$B=\Gamma(A),\ C=\Theta(A)$ を

$$(\Gamma(A))_i=(A)_{3i},$$
$$(\Theta(A))_i=(A)_{3i}\triangle F_i(A),$$

で定義する, ここで $X \triangle Y$ は X と Y の対称差を表す．string σ において, $\Gamma(\sigma)$, また $\Theta(\sigma)$ を上記同様の形で定義する．我々は以下のことを証明する：もし $\Phi_b(B)$ と $\Phi_c(C)$ が全関数で等しいならば, それは $(A)_{3i}$ という形の有限個の和をオラクルに使うことで, 計算できる．まず各 i において, $(A)_{3i}$ は B-帰納的であり, また C-帰納的でもあることに注意する．各 $\{(A)_{3i}\}_{i\in\omega}$ は独立であるから, B と C の次数は下限をもたない．

さて $\Phi_b(B)$ と $\Phi_c(C)$ は全関数で等しいとしよう．　S を次を満たす string σ の集合とする：$\Phi_b(\Gamma(\sigma))$ と $\Phi_c(\Theta(\sigma))$ は両立しない．すると S は帰納的である．$\Phi_b(\Gamma(A))$ と $\Phi_c(\Theta(A))$ は全関数で等しいので, A が 1-generic であることから, ある $\sigma < A$ が存在して, σ のどんな拡張も S の要素とならない．ここで $\Phi_b(\Gamma(A))$ は $\{(A)_{3i}\}_{i\leq|\sigma|}$-帰納的となることを示す．$k$ が与えられたとき, $\Phi_b(\Gamma(A))$ を計算するためには, まず次を満たす $\nu \geq \sigma$ を探す：

1. $\Phi_b(\Gamma(\nu))(k)$ は定義され, そして
2. ν は, A の特性関数の $\{\langle 3i, j\rangle \mid i \leq |\sigma| \ \&\ j \in \omega\}$ への制限と両立する．

すると $\Phi_b(\Gamma(\nu))(k) = \Phi_b(\Gamma(A))(k)$ となる．(もしそうでなければ, A の始切片 $\mu \geq \sigma$ で, $\Phi_c(\Theta(\mu))(k) \neq \Phi_b(\Gamma(\nu))(k)$ となるものが存在する．$\Gamma(A)$ と $\Theta(A)$ の定義そして, 上記 (2) より, 明らかに, ある $\delta \geq \sigma$ が存在して , $\Gamma(\delta) = \Gamma(\nu)$ また $\Theta(\delta) = \Theta(\mu)$ となる．よって $\Phi_b(\Gamma(\delta))$ と $\Phi_c(\Theta(\delta))$ は両立せず, 従って矛盾となる．)

極小次数の構成において, 与えられた σ において, σ を ν に拡張し, しかも ν が与えられた木の（splitting かあるいは nonsplitting となるような) 部分木上にあるようにする．しかし generic な集合の構成では, 与えられた σ において, σ を ν に拡張し, 与えられた帰納的可算な稠密（dense) な string の集合の要素となるようにする．これらの構成は異なる方向性を持っている．そこで我々は, 与えられた generic (あるいは n-generic) な次数 a において, a はその下に極小次数をもつか, このことを知りたい．次の Jockusch [1] の結果は, Martin の結果に基づくもので, generic な次数の分布に関するある種の等質性を表している．

定理 3.2　Jockusch [1].　各 $n \geq 2$, 各 n-generic な次数 a, そして任意の $b \leq a$ において, n-generic な次数 $c \leq b$ が存在する．

どんな 1-generic な次数も極小とはならないので, どんな 2-generic な次数も, その下に極小次数をもたない．

次に示すように, 1-generic な次数は帰納的可算ではないだけでなく, その下にも帰納的可算な次数をもたない．

命題 3.2　どんな 1-generic な次数も, その下に 0 でない帰納的可算な次数をもつことはない．

証明．A を 1-generic な集合とする．仮に, ある帰納的可算な E において, $E \leq_T A$ となったとする．還元オペレータ Φ を $\Phi(A) = E$ となるものとする．E は帰納的可算であるから, 次を仮定できる：各 σ と k において, もし $\Phi(\sigma)(k) = 1$ ならば k は E のなかに, ステージ $|\sigma|$ 以内に並べられる．S を, ある k が存在して, $\Phi(\sigma)(k) = 0$ だが $E(k) = 1$ となる, そのような string σ の集合とする．すると S は Σ^0_1 となる．$\Phi(A) = E$ であるから, ある $\sigma < A$ が存在して, σ のどんな拡張も S の要素とはならない．ここで E 帰納的となることを証明する．E を計算するには, 与えられた k において, string $\nu \geq \sigma$ で $\Phi(\nu)(k)$ が定義されるようなものを探す．すると $\Phi(\nu)(k) = 1$ iff $E(k) = 1$ が成り立つ．すると E は帰納的となる．

n-generic な次数は帰納的可算とはならないので, n-generic な次数の相対的な帰納的可算性について調べる．

定義 3.2　集合 A が immune とは, A が無限でさらに, 帰納的な無限集合を部分集合としてもらないことをいう.

もし A が 1-generic ならば A とその補集合はともに immune となる.

定理 3.3　Jockusch [1]. もし a が 1-generic ならば, ある $c < a$ で, a は c-帰納的可算となるものが存在する.

証明. A を 1-generic な集合とする. まず $p(i,j) = 2^i 3^j$ と定義する. どんな σ についても, $\Phi(\sigma)$ を, σ と同じ長さの string ν で,

$$\nu^{-1}(1) = \{p(i,j) \mid \sigma(i) = 1 \ \& \ \sigma(p(i,j)) = 0\}.$$

となるものとする. $\Phi(A)$ も同様に定義する. A は immune であるから, 各 i に対し, ある j が存在して, $p(i,j) \notin A$ となる. よって A は $\Phi(A)$-帰納的可算となる. ここで A は $\Phi(A)$-帰納的とはならないことを示す.

補題 3.1　σ と τ を $\tau \leq \sigma$ で, さらに p の値域に含まれないようなある $n \geq |\tau|$ に対し, $\sigma(n) = 0$ となる, そのようなものとする. このときある string $\nu \geq \tau$ が存在して, $\nu(n) = 1$ と $\Phi(\nu) \geq \Phi(\sigma)$ が成り立つ.

証明. T を包含関係に関して最小の集合で次を満たすものとする：$n \in T$ さらに, もし $i \in T$, $\sigma(i) = 0$ さらに $p(i,j) < |\sigma|$ ならば, $p(i,j) \in T$ となる. ν を σ と同じ長さの string で, $\nu^{-1}(1) = \sigma^{-1}(1) \bigcup T$ となるものとする. すると T の各要素は $|\tau|$ 以上であるから, $\nu \geq \tau$. $n \in T$ であるから, $\nu(n) = 1$. 最後に $\Phi(\nu) \geq \Phi(\sigma)$ を示す. $k < |\Phi(\sigma)| = |\sigma|$ が与えられたとする. もし k が $p(i,j)$ の形でなければ, $\Phi(\nu)(k) = \Phi(\sigma)(k) = 0$ となる. 次にある i,j に対して $k = p(i,j)$ となると仮定する.

もし $\Phi(\sigma)(k) = 0$ ならば, $\sigma(i) = 0$ かあるいは $\sigma(p(i,j)) = 1$ が成り立つ. 最初に $\sigma(i) = 0$ を仮定する. もし $i \in T$ ならば, T の定義により, $p(i,j) \in T$ となる. よって $\nu(p(i,j)) = 1$. 従って $\Phi(\nu)(p(i,j)) = 0$. もし $i \notin T$ ならば $\nu(i) = 0$ となる. よって $\Phi(\nu)(p(i,j)) = 0$. 次に $\sigma(p(i,j)) = 1$ を仮定する. このとき明らかに $\nu(p(i,j)) = 1$. よって $\Phi(\nu)(p(i,j)) = 0$. 従ってもし $\Phi(\sigma)(k) = 0$ ならば $\Phi(\nu)(p(i,j)) = 0$ となる.

もし $\Phi(\sigma)(k) = 1$ ならば, $\sigma(i) = 1$ また $\sigma(p(i,j)) = 0$ が成り立つ. $\sigma(i) = 1$ であるから, $\nu(i) = 1$ である. また T の定義より, $p(i,j) \notin T$ となる. 従って $\nu(p(i,j)) = 0$. $\nu(i) = 1$ また $\nu(p(i,j)) = 0$ であるから, $\Phi(\nu)(k) = 1$ が成り立つ. 従ってもし $\Phi(\sigma)(k) = 1$ ならば $\Phi(\nu)(p(i,j)) = 1$ となる. これで補題の証明が終わる.

次に定理の証明を終える. 背理法により, ある Ψ に対し, $\Psi(\Phi(A)) = A$ となったとする. S を string μ の集合で, μ と $\Psi(\Phi(\mu))$ は両立不可能となるものとする. 明らかに S は帰納的である. A は 1-generic であるから, ある A の始切片 α が存在して, α のどんな拡張も S の要素とならない. $n \geq |\alpha|$ を $n \notin A$ でまた n は（どんな i,j に対しても）$p(i,j)$ の形とはならないものとする. $\Psi(\Phi(A)) = A$ であるから, β を $\Psi(\Phi(\beta))(n) = 0$ となるものとする. 上の補題により, ある $\gamma \geq \alpha$ が存在して, $\gamma(n) = 1$ また $\Phi(\gamma) \geq \Phi(\beta)$ となる. すると $\Psi(\Phi(\gamma))(n) = 0$ また $\gamma(n) = 1$ となる. これは矛盾である.

系 3.1　a が 1-generic ならば, $D(\leq a)$ は稠密ではない. 実際 $D(\leq a)$ において, どの始切片も稠密でない.

証明. a を 1-generic とする. $b < a$ を, a が b-帰納的可算となるようにとる. Yates による定理, 任意の 0 でない帰納的可算な次数はその下に極小次数を持つ, の証明を b に相対化することにより, ある次数 c が存在して, c は $> b$ における極小次数（minimal cover）となる. 従って $D(\leq a)$ は稠密ではない. 2 番目の主張は定

理 3.2 より得られる.

A が B-n-generic とは, B 上に相対化した任意の Σ_n^0 な string の集合に対し, ある string $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ かあるは, どんな σ の拡張も S の要素とはならないときをいう. Post の階層定理により, A が $n+1$-generic iff A が 1- $\emptyset^{(n)}$-generic. もし A が n-generic で B が A-n-generic ならば $A \oplus B$ が n-generic となる.

系 3.2　a が 2-generic ならば, ある $b < a$ が存在して $b \in GL_2 - GL_1$ となる.

証明. もし a が 2-generic ならば, a は $\emptyset'$-1-generic である. 定理 3.3 を相対化することで, ある $b < a$ が存在して, a は b-帰納的可算で $a \not\leq b \cup 0'$ また $a \leq b'$ となる. a は 2-generic だから, 補題 2.3 により $a'' = a \cup 0''$. よって $b'' \leq a'' = a \cup 0'' \leq b' \cup 0'' \leq (b \cup 0')'$. 従って $b'' \leq (b \cup 0')'$ となり $b \in GL_2$. $a \not\leq b \cup 0'$ また $a \leq b'$ だから, $b' \not\leq b \cup 0'$ となる. よって $b \in GL_2 - GL_1$ となる.

どんな 1-generic な次数も GL_1 であるから, 次の系が得られる.

系 3.3　もし a が 2-generic ならば, ある 0 でない $b < a$ で 1-generic でないものが存在する.

参考文献

[1] Jockusch, C. G. *Degrees of generic sets*, Recursion Theory-Its Generalizations and Applications-, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press, Cambridge, 1980, pp 110-139.

[2] Lerman, M. *Degrees of Unsolvability*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[3] Soare, R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987.