論理リテラシー演習・解答解説付き（１）

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授 鈴木 登志雄 2009/10/21

この文書は，高等学校の水準を少し越えた程度の集合と論理についての自習教材であり，問題と解答・解説から成ります.「どちらかというと数学の証明問題は苦手」という読者を想定しています．以下のテキストの第４章「集合と論理の記号」の章末問題を補充するものです.

鈴木登志雄「論理リテラシー」培風館 (2009)

テキストの正誤表は以下のウェブサイトにあります.（http:// に続けて）

`www.ac.auone-net.jp/%7Ebellp/book/ronrite2009/ronrite.html`

問題

問１（集合と論理が役に立つ場面の具体例） 通常の集合では要素の順序を気にせず，たとえば $\{1,2\}$ と $\{2,1\}$ は同じものと考える．一方，要素が並ぶ順番まで考慮したものを組（タプル）といい，とくに要素を２個並べた $\langle a,b\rangle$ の形の組を順序対（じゅんじょつい）という．以下のそれぞれの問に５０字から１００字の範囲で答えよ.

(1) パソコンで扱うデータのうち，組の有限集合，もしくは組の組とみなせるものの例をあげ，なぜそうみなせるのか述べよ.

(2) 高等学校の数学で扱う概念のうち，順序対の無限集合とみなせるものの例をあげ，なぜそうみなせるのか述べよ.

問２（命題をつなぐ「ならば」の基本） 命題 P は偽であり，命題 Q は真であるとする．このとき，以下の各々の命題の真偽を判定せよ.

(1) $P \to P$

(2) $P \to Q$

(3) $Q \to P$

(4) $Q \to Q$

解答・解説

問１（集合と論理が役に立つ場面の具体例）の解答例　(1) 表計算ソフトのシート．行，すなわち横の並びをひとつの組とみなせる．このとき，シートは行の組であり，行の順番を度外視すれば行の有限集合である．

(2) xy 平面（座標平面）．平面上の各々の点をその座標と同一視すると，点は二つの実数からなる順序対とみなすことができ，座標平面は無数に多くの点からなる集合である．

解説 別解，多数あり．たとえば (1) では関係データベースの表，(2) では座標空間など．テキスト３．１１節および４．２節参照．なお，パソコンの世界においても数学の世界においても，単純なデータや概念の組み合わせによって役に立つ対象を組み立てたり，また逆に，役に立つ対象を単純なデータや概念の組み合わせに分解して調べることがしばしばある．上記の解答例も，そのような組み立て・分解の例であり，ここで集合と論理は，いわばネジやドライバーのように役立っているのである．

問２（命題をつなぐ「ならば」の基本）の解答例

(1) 真，(2) 真，(3) 偽，(4) 真．

解説 どうやって上記の答えを得るのであろうか？優等生的な解答は「真理値表を書く」．この優等生的解答に対し,「あー，何をやっているのかわからなくなった」と心の中でつぶやいてしまった人，まさにそのような読者にこの解説を捧げる．日本語における「ならば」や「… すれば」という条件表現には多様な意味がある（テキスト第１章参照）．一方，**数学や論理学の「ならば」は，日本語の「ならば」を精密化したものではない．論理学の専門用語である imply （名詞形 implication）を日本語訳したものなのである．**では，数学や論理学の「ならば」とは何か．実は数学や論理学の「ならば」にもいくつか種類があるのだが，基本的な意味は「正しさの程度の比較」である．とくに，命題（真，偽のどちらか一方を割り当てられた文）どうしの正しさは次のように比較する．

(原則１) 偽は真よりも，正しさの程度が低い．不等号にたとえると 偽 $<$ 真.

(原則２) 二つの命題の真偽が一致するとき，両者の正しさの程度は同じ．等号にたとえると真 $=$ 真．また，偽 $=$ 偽.

(原則３) P と Q は命題とする．**（数学や論理学における）「P ならば Q」とは，P の正しさの程度が命題 Q の正しさの程度以下であることをいう．**つまり「P ならば Q」とは

$$(P\text{ の正しさの程度}) \leqq (Q\text{ の正しさの程度})$$

を表すのである.「P ならば Q」を記号で $P \to Q$ と表す.

ここで「a が b 以下」（記号で $a \leqq b$）とは，$a = b$ の場合も含めた大小関係であることに注意すること．まとめると,「偽 $\leqq$ 偽」,「偽 $\leqq$ 真」,「真 $\leqq$ 真」は成り立つ．一方,「真 $\leqq$ 偽」は成り立たない．こうして上記解答を得る．この解答は,「ならば」の真理値表ほとんどそのままである．なお，テキストでは手の指の形を使い，上記の原則を体で覚える方法を紹介している（第２章）．