
集合と論理演習 (5) まとめ

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授 鈴木 登志雄 2009/10/21

鈴木登志雄は2006年度後期に首都大学東京で「集合と論理」「集合と論理演習」(理工学系数理科学コース1年)を担当しました。以下の問39は,そのときの演習レポート課題であり,問40,41は講義の期末試験問題です。このとき講義・演習で共通に用いたテキストは

田中一之・鈴木登志雄「数学のロジックと集合論」培風館(2003)

です。その年度の試験範囲はテキスト第0章「論理と集合の記号」から第1章「関係,関数,濃度」§1.7「無限とは何か」まででした。

問39 (1) X, Y は空でない集合, f は X から Y への関数であるとする。 X 上の2項関係 R_f を以下のように定める。

$x_1, x_2 \in X$ に対し, 「 $x_1 R_f x_2$ 」とは「 $f(x_1) = f(x_2)$ であること」。

このとき, R_f は X 上の同値関係であることを示せ。

(2) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 上の2項関係 R を以下のように定める。

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し, 「 $m R n$ 」とは「 $(m+n)(m-n)$ が17で割り切れること」。

このとき, R が \mathbb{N} 上の同値関係であることを示せ。

問40 X, Y は空でない集合, f は X から Y への関数であるとする。また, R_2 は Y 上の半順序であるとする。ただし, ここでいう半順序とは狭義でない半順序, すなわち, 反射律・反対称律・推移律をみたま関係をいう。 X 上の2項関係 R_1 を以下のように定める。

$x_1, x_2 \in X$ に対し, 「 $x_1 R_1 x_2$ 」とは「 $f(x_1) R_2 f(x_2)$ であること」。

このとき, 以下の問(1), (2)に答えよ。

(1) f が単射でないならば, R_1 は X 上の半順序でないことを示せ。

(2) f が単射であるならば, R_1 は X 上の半順序であることを示せ。

問41 集合の濃度について以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1) X は集合であるとする。このとき, X はベキ集合 $P(X)$ と対等でないことを示せ。

(2) カントル・ベルンシュタイン・シュレーダーの定理を述べよ(証明はしなくてよい)。

(3) 数直線上の閉区間 $[0, 1]$ は开区間 $(0, 1)$ と対等である(濃度が等しい)ことを示せ。