
集合と論理演習（4）無限集合

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授 鈴木 登志雄 2009/10/21

以下は，鈴木登志雄が 2006 年度後期に首都大学東京で「集合と論理演習」（理工学系数理科学コース１年）を担当したとき使用した問題の抜粋です．このとき用いたテキストは

田中一之・鈴木登志雄「数学のロジックと集合論」培風館 (2003)

です．この文書にはテキスト第１章「関係，関数，濃度」§1.7「無限とは何か」に関する問題を掲載しています．

注意 「 ⋯ の例をあげよ」「 ⋯ は成り立つか」「 ⋯ であるか判断せよ」という問題では答えを述べるだけでなく，理由も述べること．また，自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ を $\mathbb{N}$ で表し，正の整数全体の集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ を $\mathbb{N}^+$ で表す.（注．0 を自然数とみなさず，単に $\mathbb{N}$ で $\{1, 2, 3, \cdots\}$ を表す文献も多い.）整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$，実数全体の集合を $\mathbb{R}$，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．＊が付いた問いへの答えには，厳密に言うと選択公理を必要とする．ただし，さしあたり選択公理に興味を持つことを特に強く推奨するわけではない．

問 33 以下の各々の集合について，可算無限集合であるか，非可算集合であるかを判断せよ．

(1) $\mathbb{R}^2$.
(2) $\mathbb{Q}^3$.
(3) $\mathbb{C}$.
(4) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数全体の集合.
(5) $\mathbb{N}$ から $\{0, 1\}$ への関数全体の集合.
(6) $\{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$．ただし i は虚数単位.
(7) $\bigcup\{\mathbb{N}^m : m \in \mathbb{N}^+\}$.
(8) `a`，`b`，`c`，⋯，`x`，`y`，`z` の 26 文字を（重複を許して有限個）並べてできるあらゆる文字列の集合.（たとえば，`number` や `university`, `wahaha` はいずれも上記集合の元である.）
(9) 有理数のみを係数とする 2 次方程式の解として表される複素数全体の集合.

問 34 (1) テキスト p.61 問 1.16 (1) に答えよ.
(2) テキスト p.61 問 1.16 (2) に答えよ.

問 35　$(A, <_A)$, $(B, <_B)$ は狭義の半順序集合であり，$(A, <_A)$ と $(B, <_B)$ は順序同型であるとする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　$(A, <_A)$ は最大元をもつとする．このとき，$(B, <_B)$ も最大元をもつことを示せ．

(2)　$(A, <_A)$ は全順序集合であるとする．このとき，$(B, <_B)$ も全順序集合であることを示せ．

(3)　$(A, <_A)$ は稠密であるとする．このとき，$(B, <_B)$ も稠密であることを示せ．

(4)　$(A, <_A)$ は整列集合であるとする．このとき，$(B, <_B)$ も整列集合であることを示せ．

問 36　A は空でない集合とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　A 上の 2 項関係 $\leq_A$ で，$(A, \leq_A)$ が狭義でない半順序となるものがあることを示せ..

(2)　A 上の 2 項関係 $<_A$ で，$(A, <_A)$ が狭義の半順序となるものがあることを示せ..

問 37　以下の各問いに答えよ．ただし，互いに順序同型な順序は 1 個と数える．

(1)　$\mathbb{N}$ 上の全順序で，整列順序でないものが無限個あることを示せ．

(2)　$\mathbb{N}$ 上の整列順序は無限個あることを示せ．

(3)　非可算な整列集合の例を 3 つあげよ．

定義

(1)（再掲）集合 $A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の**開集合**（open set）であるとは，任意の $x \in A$ に対して，開区間 (a, b) で $x \in (a, b) \subset A$ となるものが存在することをいう．

(2)（再掲）集合 $B \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の**閉集合**（closed det）であるとは，補集合 $\mathbb{R} - B$ が開集合であることをいう．

(3)　A は $\mathbb{R}$ の部分集合であるとする．実数 x が A の**集積点**（accumulation poit, cluster point）であるとは，任意の正の数 ε に対し,「$0 < |x - a| < \varepsilon$ かつ $a \in A$」となる点 a が存在することをいう．

問 38 ∗　A は $\mathbb{R}$ の部分集合であるとする．このとき，以下のふたつの主張は同値であることを示せ．

(I)　A の任意の集積点は A に属する．

(II)　A は（上記の定義 (2) の意味で）閉集合である．