集合と論理演習（３）全射と単射・同値関係・順序

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授 鈴木 登志雄 2009/10/21

以下は，鈴木登志雄が 2006 年度後期に首都大学東京で「集合と論理演習」（理工学系数理科学コース１年）を担当したとき使用した問題の抜粋です．このとき用いたテキストは

田中一之・鈴木登志雄「数学のロジックと集合論」培風館 (2003)

です．この文書にはテキスト第１章「関係，関数，濃度」§1.4「関係」，§1.5「同値関係と順序」，§1.6「関数」に関する問題を掲載しています．

注意 「 ⋯ の例をあげよ」という問題では答えを述べるだけでなく，それが「 ⋯ の例」になっている理由も述べること．「 ⋯ は成り立つか？」という問題では「 ⋯ 」が成り立つと答えるなら証明し，成り立たないと答えるなら反例をあげよ．なお，半順序関係のことを単に順序ということにする．また，自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ を $\mathbb{N}$ で表し，正の整数全体の集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ を $\mathbb{N}^+$ で表す．（注．0 を自然数とみなさず，単に $\mathbb{N}$ で $\{1, 2, 3, \cdots\}$ を表す文献も多い．）

問 17 $f(x) = x^2$ とするとき，以下を示せ．
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない．
(2) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は全射であるが単射でない．
(3) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は単射であるが全射でない．
(4) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は全単射である．

問 18 $f : X \to Y$ が全単射とする．このとき，関数 f^{-1} が定まり，f^{-1} も全単射になることを示せ．

問 19 $f : X \to Y$ が単射であるための必要十分条件は,「X の任意の部分集合 A, B に対して $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ が成り立つ」ことであることを示せ．

問 20 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ に対して，

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

が成り立てば，f, g はともに全単射であり，$g = f^{-1}$ かつ $f = g^{-1}$ となることを示せ．ただし id_X は X 上の恒等関数を表す．

問 21 X, Y を空でない集合とし，R を X から Y への 2 項関係とする．また，各々の自然数 n に対し，A_n は X の部分集合とする．以下の (1), (2) を示せ．

(1)
$$R[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcup_{n=0}^{\infty} R[A_n].$$

(2)
$$R[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} R[A_n].$$

問 22 $\mathbb{N}^+$ 上の 2 項関係について以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{N}^+$ 上の 2 項関係 $m|n$ を以下のように定める．この関係が順序であることを示せ．正の整数 m, n に対し，

$$m|n \quad \leftrightarrow_{\text{def.}} \ n \text{ は } m \text{ で割り切れる}.$$

(2) 2 以上の整数 k を固定する．$\mathbb{N}^+$ 上の関係 $m \equiv n \mod k$ を以下のように定める．この関係が同値関係であることを示せ．正の整数 m, n に対し，

$$m \equiv n \mod k \quad \leftrightarrow_{\text{def.}} \ m - n \text{ は } k \text{ で割り切れる}.$$

問 23 X は空でない集合とし，R は X 上の 2 項関係とする．

(1) R が X 上の同値関係ならば，R^{-1} も X 上の同値関係であることを示せ．

(2) R が X 上の順序ならば，R^{-1} も X 上の順序であることを示せ．

(3) R が X 上の全順序ならば，R^{-1} も X 上の全順序であることを示せ．

問 24 反射律と推移律をみたす 2 項関係を擬順序（pseudo-ordering）という．

(1) 2 以上の整数 k を固定する．$\mathbb{N}^+$ のベキ集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 上の 2 項関係 $R_k(x, y)$ を以下のように定める．この関係は $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 上の擬順序であるが順序でないことを示せ．$\mathbb{N}^+$ の部分集合 x, y に対し，

$$R_k(x, y) \quad \leftrightarrow_{\text{def.}} \text{ 差集合 } y - x \text{ の任意の要素は } k \text{ で割り切れる}.$$

(2) $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 上の 2 項関係 $R_*(x, y)$ を以下のように定める．この関係は $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 上の擬順序であるが順序でないことを示せ．$\mathbb{N}^+$ の部分集合 x, y に対し，

$$R_*(x, y) \quad \leftrightarrow_{\text{def.}} \text{ ある } k \in \mathbb{N}^+ \text{ が存在して，差集合 } y - x \text{ の任意の要素は } k \text{ 以下である}.$$

(3) X を空でない集合とし，R を X 上の擬順序とする．X 上の 2 項関係 $\equiv_R (x, y)$ を以下のように定める．この関係は X 上の同値関係であることを示せ．X の要素 x, y に対し，

$$x \equiv_R y \quad \leftrightarrow_{\text{def.}} \ xRy \text{ かつ } yRx.$$

問 25 ベキ集合 $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$ とその上の順序 $\subset$ について次の問いに答えよ．

(1) $\{\{0\},\{0,1\}\}$ の上界をすべて求めよ．

(2) $\{\{0\},\{1\},\{2\}\}$ の上限を求めよ．

(3) $\{\{0\},\{1\}\}$ の下限を求めよ．

問 26 X, Y を集合とする．X から Y への関係 F が関数 $f: X \to Y$ を定めるとする．このとき，以下を示せ．

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

ただし Y の各々の部分集合 C に対し，$f^{-1}[C]$ は F による C の逆像（F の逆関係 F^{-1} による C の像）を表す．すなわち，$f^{-1}[C] = \{x \in X : \exists y \in C\ f(x) = y\}$．

問 27 X, Y, Z を集合とする．関数 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ について以下に答えよ．

(1) f, g が（それぞれ，X から Y への，そして Y から Z への）単射ならば，$g \circ f$ は（X から Z への）単射であることを示せ．

(2) 主張「$g \circ f$ が単射ならば，f は単射である」は（任意の X, Y, Z, f, g に対して）成り立つか？

(3) 主張「$g \circ f$ が単射ならば，g は単射である」は成り立つか？

(4) f, g が全射ならば，$g \circ f$ は全射であることを示せ．

(5) 主張「$g \circ f$ が全射ならば，f は全射である」は成り立つか？

(6) 主張「$g \circ f$ が全射ならば，g は全射である」は成り立つか？

(7) g は全単射とする．このとき，主張「$g \circ f$ が単射であるための必要十分条件は，f が単射であること」は成り立つか？

(8) g は全単射とする．このとき，主張「$g \circ f$ が全射であるための必要十分条件は，f が全射であること」は成り立つか？

問 28 n を正の整数とし，f は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への関数とする．このとき，以下の主張 (i), (ii) が同値であることを示せ．

(i)「f は単射である」

(ii)「f は全射である」

定義

(1)　n を正の整数とする．$\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への全単射を n **文字の置換**（順列）という．

(2)　f, g が n 文字の置換であるとき，合成関数 $g \circ f$ を f **と** g **の（置換としての）積** fg という（注，合成関数 $g \circ f$ を置換の積とよぶときは gf ではなく fg と書くのが慣例である）．

(3)　n が 2 以上の整数で，f が n 文字の置換であり，a, b は $1 \leq a < b \leq n$ となる整数であるとする．任意の $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して以下の条件が成り立つとき，f は a, b **の**

互換であるという．

$$f(x) = \begin{cases} b & (x = a \text{ のとき}) \\ a & (x = b \text{ のとき}) \\ x & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

問 29 n を 2 以上の整数とし，f は n 文字の置換であるとする．このとき，f はいくつかの互換の積として表されることを示せ．

定義 n, m を正の整数とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数 f が**線形写像**（線型写像，一次写像）であるとは，以下の条件 (I), (II) が成り立つことをいう．

(I) 任意の実数 a と $\mathbb{R}^n$ の任意の要素 $\vec{x}$ に対して $f(a\vec{x}) = af(\vec{x})$.

(II) $\mathbb{R}^n$ の任意の要素 $\vec{x}, \vec{y}$ に対して $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

特に $n = m$ のとき，f を $\mathbb{R}^n$ 上の**線形変換**（線型変換，一次変換）という．

問 30 f は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への関数とする．このとき，以下の主張 (i), (ii) が同値であることを示せ．

(i) f は $\mathbb{R}^2$ 上の一次変換である．

(ii) ある 2 次正方行列 A が存在して，任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ となる．

問 31 f は $\mathbb{R}^2$ 上の一次変換であるとする．このとき，以下の主張 (i), (ii) が同値であることを示せ．

(i)「f は単射である」

(ii)「f は全射である」

問 32 $\mathbb{R}$ における通常の大小関係 $<$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，空でなく，上に有界であるが最大元（最大値）を持たないものの例をあげよ．

(2) 開区間 $(0, 1)$ の上界であるが上限でない数の例をあげよ．