集合と論理演習（2）集合族・順序対・直積

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授 鈴木 登志雄 2009/10/21

以下は，鈴木登志雄が 2006 年度後期に首都大学東京で「集合と論理演習」（理工学系数理科学コース１年）を担当したとき使用した問題の抜粋です．このとき用いたテキストは

田中一之・鈴木登志雄「数学のロジックと集合論」培風館 (2003)

です．この文書にはテキスト第１章「関係，関数，濃度」§1.2「ベキ集合と集合族」§1.3「順序対と直積」に関する問題を掲載しています．

注意 「$\cdots$ の例をあげよ」という問題では答えを述べるだけでなく，それが「$\cdots$ の例」になっている理由も述べること．$\mathbb{R}$ で実数全体の集合（数直線）を表す．

問 7 U を全体集合とし，族 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}(U)$ の部分族とする．また，$\mathcal{A}$ は空でないとする．
(1) $(\bigcup \mathcal{A})^c = \bigcap \{X^c : X \in \mathcal{A}\}$ が成り立つことを示せ．
(2) $(\bigcap \mathcal{A})^c = \bigcup \{X^c : X \in \mathcal{A}\}$ が成り立つことを示せ．

定義 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．
(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の**開集合**（open set）であるとは，任意の $x \in A$ に対して，開区間 (a, b) で $x \in (a, b) \subset A$ となるものが存在することをいう．
(2) 集合 $B \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の**閉集合**（closed det）であるとは，補集合 $\mathbb{R} - B$ が開集合であることをいう．

問 8
(1) $\mathbb{R}$ の部分集合であって，開集合でもなく閉集合でもないものの例をあげよ．
(2) $\mathbb{R}$ の部分集合であって，開集合でもあり閉集合でもあるものの例をあげよ．

問 9
(1) 族 $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ の開集合の族であるとする（すなわち，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の部分族であり，$\mathcal{A}$ の要素はすべて開集合であるとする）．このとき，$\bigcup \mathcal{A}$ は開集合であることを示せ．
(2) $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるとする．このとき，$\bigcap \{A_1, A_2, \cdots, A_{100}\}$ は開集合であることを示せ．
(3) $\mathbb{R}$ の開集合の族 $\mathcal{A}$ であって，$\mathcal{A}$ は空でなく，かつ $\bigcap \mathcal{A}$ が開集合でないものの例をあげよ．

問 10
(1) 族 $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合の族であるとする．ただし $\mathcal{B}$ は空でないとする．このとき，$\bigcap \mathcal{B}$ は閉集合であることを示せ．
(2) $B_1, B_2, \cdots, B_{100}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であるとする．このとき，$\bigcup \{B_1, B_2, \cdots, B_{100}\}$ は閉集合であることを示せ．
(3) $\mathbb{R}$ の閉集合の族 $\mathcal{B}$ であって，$\bigcup \mathcal{B}$ が閉集合でないものの例をあげよ．

問 11
A は $\mathbb{R}$ の開集合であるとする．このとき $A = \bigcup\{(a,b) : (a,b) \subset A\}$ であることを示せ．なお，ここで (a,b) は開区間を表す．

問 12 (1) 集合 $a,\, b$ に対し，$\{\{\emptyset, \{a\}\}, \{\{b\}\}\}$ を $p_1(a,b)$ で表す．このとき，任意の集合 $a,\, b,\, c,\, d$ に対して以下が成り立つことを示せ．$p_1(a,b) = p_1(c,d) \Leftrightarrow (a = c$ かつ $b = d)$.

(2) 集合 $a,\, b$ に対し，$\{(0,a),(1,b)\}$ を $p_2(a,b)$ で表す．このとき，任意の集合 $a,\, b,\, c,\, d$ に対して以下が成り立つことを示せ. $p_2(a,b) = p_2(c,d) \Leftrightarrow (a = c$ かつ $b = d)$.

問 13　A は集合であり，$\mathcal{B}$ は集合の族であるとする．ただし $\mathcal{B}$ は空でないとする．

(1) $A \times \bigcup \mathcal{B} = \bigcup\{A \times C : C \in \mathcal{B}\}$ が成り立つことを示せ．

(2) $A \times \bigcap \mathcal{B} = \bigcap\{A \times C : C \in \mathcal{B}\}$ が成り立つことを示せ．

定義 n を正の整数とする．

(1) $\mathbb{R}^n$ を n **次元数ベクトル空間**という．$\mathbb{R}^n$ の要素のうち，n 個の要素がすべて 0 であるものを **($\mathbb{R}^n$ の) 零ベクトル**という．文脈から n が明らかなとき，零ベクトルを $\vec{0}$ で表す．a が実数で，$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の要素であるとき，$(ax_1, \cdots, ax_n)$ を $\vec{x}$ の a 倍とよび，$a\vec{x}$ で表す．また，$(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の和とよび，$\vec{x} + \vec{y}$ で表す．

(2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が $\mathbb{R}^n$ **の部分空間**であるとは，以下の条件 (I),(II),(III) がすべて成り立つことをいう．

(I) $\vec{0}$ は S に属する．

(II) 任意の実数 a と S の任意の要素 $\vec{x}$ に対して $a\vec{x}$ が S に属する．

(III) S の任意の要素 $\vec{x}, \vec{y}$ に対して $\vec{x} + \vec{y}$ が S に属する．

問 14　n を正の整数とし，S は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であるとする．以下のふたつの主張（ア），（イ）が同値であることを示せ.（ア）「S は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である」（イ）「S は空でなく，かつ，任意の実数 a, b と S の任意の要素 $\vec{x}, \vec{y}$ に対して $a\vec{x} + b\vec{y}$ が S に属する」

問 15　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $S_1,\, S_2$ を以下のように定める．

$$S_1 = \{(x,y,z) : 7x + 3y - 8z = 0\}, \quad S_2 = \{(x,y,z) : 7x + 3y - 8z = 5\}.$$

(1) 集合 S_1 が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) 集合 S_2 が $\mathbb{R}^3$ の部分空間でないことを示せ．

問 16

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $S_1,\, S_2$ であって，$S_1 \cup S_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間でないものの例をあげよ．

(2) 族 $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間の族であるとする．ただし $\mathcal{A}$ は空でないとする．このとき，$\bigcap \mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(3) 順序対 $((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3))$ を 5 組 $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$ と同一視することにより，数ベクトル空間の直積 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ と数ベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ を同一視しよう．さて，S_1 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であり，S_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるとする．上記の同一視により，$S_1 \times S_2$ を $\mathbb{R}^5$ の部分集合とみなす．このとき，$S_1 \times S_2$ は $\mathbb{R}^5$ の部分空間であることを示せ．