数え上げ：
『例題で学ぶ集合と論理』（森北出版，2016）非公式別添資料 *

鈴木 登志雄

2020 年 12 月 8 日

概要

有限集合の要素の個数，とくに数え上げにおける多項式の活用について学ぶ．

1　この資料の位置づけ

この資料では，有限集合の要素の個数について，『例題で学ぶ集合と論理』（森北出版，2016，以下「書籍本体」とよぶ）に話題を追加する．とくに数え上げにおける多項式の活用について学ぶ．書籍本体の各節を理解するのに，本資料の内容は必須ではない．この資料は主に，工学系の読者を念頭に置いている．

（有限集合の要素の個数）		（可算無限集合）		（非可算無限集合）
§§3.2.1	→	§§3.2.2	→	§§3.2.3
	↘			
		本資料		
		（数え上げ）		

表 1.1　この資料は，書籍本体から枝分かれした話

§§ はサブセクションを表す．

2　有限集合について書籍本体で学んだこと

有限集合の要素の個数について書籍本体で学んだことをおさらいする．

2.1　ピジョンホール・プリンシプル

本資料では負でない整数を自然数という．自然数 n に対して，n 未満の自然数全体を Z_n で表そう．たとえば $Z_0 = \emptyset$，$Z_3 = \{0, 1, 2\}$ である．

* この資料は出版社を通さずに著者が公表しているので「非公式」と名乗っている．

- Z_n から，その真部分集合への単射は存在しない（第 1 章の章末問題 1.9）．
- Z_n の真部分集合から Z_n への全射は存在しない（同，問題 1.10）．
- $f : Z_n \to Z_n$ とする．「f が Z_n から Z_n への単射である」と「f が Z_n から Z_n への全射である」は同値である（同，問題 1.11）．

上記の~~1~~ 最初の項目について，とくに以下が成り立つ．

自然数 n, m が $n > m$ をみたし f が Z_n から Z_m への写像ならば，ある $a, b \in Z_n$ に対して $a \neq b$ かつ $f(a) = f(b)$ となる

上記をピジョンホール・プリンシプルという（書籍本体では，この名前は述べていない）．意訳して引き出し論法，鳩の巣原理などとよばれる．

COLUMN　和訳はかわいい方がいい？

「Pigeonhole」で画像検索してみるとわかるが，この語は必ずしも鳩の巣箱を表しているのではなく，むしろ鳩の巣箱に似た書類入れを表す．書類の数 n より書類を入れる箱の数 m が少ないとき，すべての書類をどこかの箱に入れると，少なくとも一つの箱には 2 通以上の書類が入るというわけである．鳩と巣箱はかわいいたとえのせいか,「鳩の巣原理」や「鳩の巣論法」という和訳が好んで使われるようである．鳩の数 n より巣箱の数 m が少ないとき，すべての鳩がどれかの巣箱に入ると，少なくとも一つの巣箱には 2 羽以上の鳩が入ることになる．有限オートマトンと正規言語についてポンプ補題という重要な結果があり，その証明の中ではピジョンホール・プリンシプルが活用されている．

2.2　空写像

0 個のものの中から 0 個選ぶやり方は何通りあるだろうか．数学ではふつう，一通りであると考える．その裏付けとなる理論として，書籍本体 2.4 節では空写像について学んだ．写像の定義に忠実に考えると，空集合から空集合への写像はただ一つあり，それは空集合である．同様に，空集合から空集合への全単射はただ一つあり，それは空集合である．これは 0 の階乗 $0!$ を 1 と定義することとうまくつじつまが合う．すなわち，$n = 0$ の場合も含めて，Z_n から Z_n への全単射の総数が n の階乗 $n!$ となる．

COLUMN　ゼロのゼロ乗の処遇をどうすべきかは分野による

離散数学の文脈では，Z_n から Z_m への写像の総数を m^n と考えるとすっきりする．この文脈では，ゼロのゼロ乗 0^0 は 1 となる．たとえとして，m 個の楽曲が入っている記憶媒体を想像しよう．そこから重複を許して n 曲選んでプレイリストを作るやり方が何通りあるかというと，m^n 通りである．もし記憶媒体が空なら 1 曲以上選ぶことはできない（$n \geq 1 \implies 0^n = 0$）．また，空の記憶媒体から 0 曲選ぶ場合はプレイリストの作り方は 1 通りで，それは空のプレイリストである（$0^0 = 1$）．一方，複素関数の文脈では，ゼロのゼロ乗は定義しないのが妥当とされる．ゼロのゼロ乗の処遇をどうすべきかは分野による．ときどき,「数学ではゼロのゼロ乗は定義しないのが正しいのです」と自信満々に書いてある文献があるが，それは勇み足である．

2.3　包除原理

サブセクション 3.2.1 節では有限集合 A_1, A_2, A_3 の濃度について以下を示した．

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}
$$

これを 4 個の集合 $A_1, \ldots, A_4$ に拡張したものは第 3 章の章末問題 3.4 になっている．

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$

n が正の整数で A_1，A_2，$\cdots, A_n$ が有限集合であるとき，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ および $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ をそれぞれ

$$
\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i
$$

と書く．数学的帰納法を用いて以下を示すことができる．帰納ステップは章末問題 3.4 の解答（p.147）と同様に進めればよい．

$$
\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\
&\cdots + (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i(1) < i(2) < \cdots < i(t) \le n} |\bigcap_{j=1}^{t} A_{i(j)}| \\
&\cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|
\end{aligned}
$$

上記の公式を**包除原理（inclusion-exclusion principle）**という．

3　数え上げにおける多項式の活用

3.1　二項係数の復習

いま r, n は自然数で $r \le n$ とする．ちょうど n 個の要素をもつ集合，たとえば n 未満の自然数全体 Z_n の部分集合のうち，要素の個数がちょうど r 個のものの個数は，高校数学でいう「n 個のものから r 個とる組合せの総数」である．これを 2 項係数といい，日本の高校の教科書では ${}_nC_r$ と書く．英語の文献では $\binom{n}{r}$ と書

くことが多い．

$$
{}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{3.1}
$$

数学的帰納法を用いると，$(x+y)^n$ を展開した式において，x の r 次の項の係数は $\binom{n}{r}$ であることを示せる．証明は帰納法でよいが，ここで高校数学方式の素朴な説明を思い出そう．

□ **例 3.1** $(x+y)^5$ を展開した式において，x の 3 次の項の係数は $\binom{5}{3}$ である．これは次のようにわかる．

$$
\underset{\text{因子 1}}{(x+y)}\quad\underset{\text{因子 2}}{(x+y)}\quad\underset{\text{因子 3}}{(x+y)}\quad\underset{\text{因子 4}}{(x+y)}\quad\underset{\text{因子 5}}{(x+y)}\quad = \underset{\text{展開した結果}}{a_5x^5 + a_4x^4y + a_3x^3y^2 + a_2x^2y^3 + a_1xy^4 + a_0y^5}
$$

左辺の 5 個の因子のそれぞれから，x と y のいずれかを選びそれらの積を作り，項を作る．その項の x の次数が 3 でなければ，その項は a_3 の値に影響しない．x の次数が 3 となる項が一つ現れるたびに a_3 の値が一つ増える．したがって a_3 は 5 個の因子から（y ではなく x をとる因子）3 個を選ぶ選び方の総数に等しい．つまり右辺における x の 3 次の項の係数 a_3 は 2 項係数 $\binom{5}{3}$ である．

例 3.1 の考え方は応用が効く．

3.2 取り出す個数を指定する場合

□ **例題 3.2** 袋の中に赤玉が~~3~~2 個，白玉が~~2~~1 個，青玉が~~3~~2 個入っている．袋の中から合計 4 個の玉を取り出す場合の数は何通りあるか．ただし，取り出した結果において，同じ色の玉は区別しない（できない）とする．

解　求める場合の数を m とする．袋の中から玉を取り出す話ではないが，結果的に同じ数 m が現れる設定を考える．そこで式 a^2x^2+ax+1，$bx+1$，および c^2x^2+cx+1 の積を展開したときの係数を考察する．

$$
\underset{\text{因子 1}}{(a^2x^2+ax+1)}\quad\underset{\text{因子 2}}{(bx+1)}\quad\underset{\text{因子 3}}{(c^2x^2+cx+1)}\quad = \underset{\text{展開した結果}}{\square\, x^5 + \square\, x^4 + \square\, x^3 + \cdots}
$$

右辺における x の 4 次の項は

$$
a^2x^2bxcx + a^2x^2c^2x^2 + axbxc^2x^2 = (a^2bc + a^2c^2 + abc^2)x^4
$$

となる．$a^2bc + a^2c^2 + abc^2$ の最初の a^2bc は次のように解釈できる「x の次数は因子 1 から 2（a^2），因子 2 から 1（b^1），因子 3 から 1（c^1），合計 4 とる」a^2c^2 および abc^2 も同様に解釈できる．まとめると，左辺の三つの因子から x の次数を合計 4 となるように選ぶやり方は，a^2bc で表されるもの，a^2c^2 で表されるもの，および abc^2 で表されるものの計 3 つである．つまり $m=3$ である．

上記は考え方をていねいに説明した解答である．単に答えだけ知りたいなら，はじめから $a=b=c=1$ としてしまえば $a^2bc + a^2c^2 + abc^2 = 3$ となり，手っ取り早い．

解　（別解，答えだけ知りたい場合）式 x^2+x+1，$x+1$，および x^2+x+1 の積を（必要なら計算機を用いて）展開すると，

$$
(x^2+x+1)\quad(x+1)\quad(x^2+x+1)\quad = \square\, x^5 + 3x^4 + \square\, x^3 + \cdots
$$

右辺で x^4 の係数は 3．求める答えは 3 である．

3.3　重み付きの場合

単純に玉の個数を考察するのではなく，色に応じた重みがついている場合にも，前節の方法を応用できる．文字通りの重みではつまらないので，金額にたとえてみよう．

□ **例題 3.3** 袋の中に赤玉が~~3~~2 個，白玉が~~2~~1 個，青玉が~~3~~2 個入っている．赤玉は 10 万円，白玉は 20 万円，青玉は 15 万円の価値がある．袋の中からいくつかの玉を取り出し，価値の合計がちょうど 30 万円となる場合の数は何通りあるか．ただし，取り出した結果において，同じ色の玉は区別しない（できない）とする．

考え方　展開した結果において，ある特定の次数の項の係数を見ると答えがわかるようにしたい．例題 3.2 の展開式において x^4 の 4 は 4 個の 4 であった．今回は指数に価値を反映させたい．

解　求める場合の数を m とする．袋の中から玉を取り出す話ではないが，結果的に同じ数 m が現れる設定を考える．そこで式 $a^{20}x^{20}+a^{10}x^{10}+1$，$b^{20}x^{20}+1$，および $c^{30}x^{30}+c^{15}x^{15}+1$ の積を展開したときの係数を考察する．

$$\underset{\text{因子 1}}{(a^{20}x^{20}+a^{10}x^{10}+1)}\quad\underset{\text{因子 2}}{(b^{20}x^{20}+1)}\quad\underset{\text{因子 3}}{(c^{30}x^{30}+c^{15}x^{15}+1)}\quad\underset{\text{展開した結果}}{=\square\, x^{70}+\cdots+\square\, x^{30}+\cdots}$$

右辺における x の 30 次の項は

$$a^{10}x^{10}b^{20}x^{20}+c^{30}x^{30}=(a^{10}b^{20}+c^{2})x^{30}$$

となる．$a^{10}b^{20}+c^{30}$ の最初の $a^{10}b^{20}$ は次のように解釈できる「x の次数は因子 1 から 10（a^{10}），因子 2 から 20（b^{20}），合計 30 とる」c^{30} も同様に解釈できる．まとめると，左辺の三つの因子から x の次数を合計 30 となるように選ぶやり方は，$a^{10}b^{20}$ で表されるもの，および c^{30} で表されるものの計 2 つである．つまり $m=2$ である．

今回も，単に答えだけ知りたいなら，はじめから $a=b=c=1$ としてしまえば $a^{10}b^{20}+c^{30}=2$ となり，手っ取り早い．

解　（別解，答えだけ知りたい場合）式 $x^{20}+x^{10}+1$，$x^{20}+1$，および $x^{30}+x^{15}+1$ の積を（必要なら計算機を用いて）展開すると，

$$(x^{20}+x^{10}+1)(x^{20}+1)(x^{30}+x^{15}+1)=\square\, x^{70}+\cdots+2x^{30}+\cdots$$

右辺で x^{30} の係数は 2．求める答えは 2 である．

最初の版のタイプミスを修正しました．失礼しました（2020 年 12 月 8 日）．